ESSAI PHILOSOPHIQUE

SUR

LES PROBABILITÉS.

ESSAI PHILOSOPHIQUE

SUR

LES PROBABILITÉS;

PAR M. LE COMTE LAPLACE,

Pair de France; Grand-Officier de la Légion-d'Honneur; Grand'Croix de l'Ordre de la Réunion; Membre de l'Institut royal et du Bureau des Longitudes de France; des Sociétés royales de Londres et de Gottingue; des Académies des Sciences de Russie, de Danemarck, de Suède, de Prusse, d'Italie, etc.

SECONDE ÉDITION,

REVUE ET AUGMENTÉE PAR L'AUTEUR.

PARIS,

Mme Ve COURCIER, Imprimeur-Libraire pour les Mathématiques et la Marine, quai des Augustins, no 57.

1814.

ESSAI PHILOSOPHIQUE

SUR

LES PROBABILITÉS.

CET Essai philosophique est le développement d'une leçon sur les probabilités, que je donnai en 1795, aux écoles normales où je fus appelé comme professeur, par un décret de la Convention nationale. J'ai publié depuis peu sur le même sujet, un ouvrage ayant pour titre : *Théorie analytique des probabilités*. Je présente ici, sans le secours de l'analyse, les principes et les résultats généraux de cette théorie, en les appliquant aux questions les plus importantes de la vie, qui ne sont en effet, pour la plupart, que des problèmes de probabilité. On peut même dire, à parler en rigueur, que presque toutes nos connaissances ne sont que probables; et dans le petit nombre des choses que nous pouvons savoir avec certitude, dans les sciences mathématiques elles-mêmes, les moyens de parvenir à la vérité, sont fondés sur les probabilités; ensorte que le système entier des connaissances humaines,

se rattache à la théorie exposée dans cet essai. On y verra sans doute avec intérêt, qu'en ne considérant même dans les principes éternels de la raison, de la justice et de l'humanité, que les chances heureuses qui leur sont constamment attachées; il y a un grand avantage à suivre ces principes, et de graves inconvéniens à s'en écarter: leurs chances, comme celles qui sont favorables aux loteries, finissant toujours par prévaloir au milieu des oscillations du hasard. Je desire que les réflexions répandues dans cet essai, puissent mériter l'attention des philosophes, et la diriger vers un objet si digne de les occuper.

De la Probabilité.

Tous les événemens, ceux même qui par leur petitesse, semblent ne pas tenir aux grandes lois de la nature, en sont une suite aussi nécessaire que les révolutions du soleil. Dans l'ignorance des liens qui les unissent au système entier de l'univers, on les a fait dépendre des causes finales, ou du hasard, suivant qu'ils arrivaient et se succédaient avec régularité, ou sans ordre apparent; mais ces causes imaginaires ont été successivement reculées avec les bornes de nos connaissances, et disparaissent entièrement devant la saine philosophie qui ne voit en elles, que l'expression de

l'ignorance où nous sommes des véritables causes.

Les événemens actuels ont avec les précédens, une liaison fondée sur le principe évident, qu'une chose ne peut pas commencer d'être, sans une cause qui la produise. Cet axiome connu sous le nom de *principe de la raison suffisante,* s'étend aux actions même les plus indifférentes. La volonté la plus libre ne peut sans un motif déterminant, leur donner naissance ; car si toutes les circonstances de deux positions étant exactement les mêmes, elle agissait dans l'une et s'abstenait d'agir dans l'autre, son choix serait un effet sans cause : elle *serait* alors, dit Leibnitz, le hasard aveugle des épicuriens. L'opinion contraire est une illusion de l'esprit qui perdant de vue, les raisons fugitives du choix de la volonté dans les choses indifférentes, se persuade qu'elle s'est déterminée d'elle-même et sans motifs.

Nous devons donc envisager l'état présent de l'univers, comme l'effet de son état antérieur, et comme la cause de celui qui va suivre. Une intelligence qui pour un instant donné, connaîtrait toutes les forces dont la nature est animée, et la situation respective des êtres qui la composent, si d'ailleurs elle était assez vaste pour soumettre ces données à l'analyse, embrasserait dans la même

formule, les mouvemens des plus grands corps de l'univers et ceux du plus léger atome : rien ne serait incertain pour elle, et l'avenir comme le passé, serait présent à ses yeux. L'esprit humain offre dans la perfection qu'il a su donner à l'astronomie, une faible esquisse de cette intelligence. Ses découvertes en mécanique et en géométrie, jointes à celle de la pesanteur universelle, l'ont mis à portée de comprendre dans les mêmes expressions analytiques, les états passés et futurs du système du monde. En appliquant la même méthode à quelques autres objets de ses connaissances, il est parvenu à ramener à des lois générales, les phénomènes observés, et à prévoir ceux que des circonstances données doivent faire éclore. Tous ses efforts dans la recherche de la vérité, tendent à le rapprocher sans cesse de l'intelligence que nous venons de concevoir, mais dont il restera toujours infiniment éloigné. Cette tendance propre à l'espèce humaine, est ce qui la rend supérieure aux animaux; et ses progrès en ce genre, distinguent les nations et les siècles, et fondent leur véritable gloire.

Rappelons-nous qu'autrefois et à une époque qui n'est pas encore bien reculée, une pluie ou une sécheresse extrême, une comète traînant après elle une queue fort étendue, les éclipses, les aurores boréales et généralement

tous les phénomènes extraordinaires étaient regardés comme autant de signes de la colère céleste. On invoquait le ciel pour détourner leur funeste influence. On ne le priait point de suspendre le cours des planètes et du soleil : l'observation eût bientôt fait sentir l'inutilité de ces prières. Mais parce que ces phénomènes arrivant et disparaissant à de longs intervalles, semblaient contrarier l'ordre de la nature ; on supposait que le ciel les faisait naître et les modifiait à son gré, pour punir les crimes de la terre. Ainsi la longue queue de la comète de 1456 répandit la terreur dans l'Europe, déjà consternée par les succès rapides des Turcs qui venaient de renverser le Bas-Empire ; et le pape Callixte ordonna des prières publiques dans lesquelles on conjurait la comète et les Turcs. Cet astre, après quatre de ses révolutions, a excité parmi nous un intérêt bien différent. La connaissance des lois du système du monde, acquise dans cet intervalle, avait dissipé les craintes enfantées par l'ignorance des vrais rapports de l'homme avec l'univers ; et Halley ayant reconnu l'identité de la comète, avec celles des années 1531, 1607 et 1682, il annonça son prochain retour pour la fin de 1758 ou le commencement de 1759. Le monde savant attendit avec impatience, ce retour qui devait confirmer l'une

des plus grandes découvertes que l'on eût faites dans les sciences, et accomplir la prédiction de Sénèque, lorsqu'il a dit en parlant de la révolution de ces astres qui descendent d'une énorme distance : « Le jour viendra que par » une étude suivie de plusieurs siècles, les » choses actuellement cachées paraîtront avec » évidence, et la postérité s'étonnera que des » vérités si claires nous aient échappé. » Clairaut entreprit alors de soumettre à l'analyse, les perturbations que la comète avait éprouvées par l'action des deux plus grosses planètes, Jupiter et Saturne : après d'immenses calculs, il fixa son prochain passage au périhélie, vers le commencement d'avril 1759, ce que l'observation ne tarda pas à vérifier. La régularité que l'astronomie nous montre dans le mouvement des comètes, a lieu sans aucun doute, dans tous les phénomènes. La courbe décrite par une simple molécule d'air ou de vapeurs, est réglée d'une manière aussi certaine, que les orbites planétaires : il n'y a de différence entre elles, que celle qu'y met notre ignorance.

La probabilité est relative en partie à cette ignorance, et en partie à nos connaissances. Nous savons que sur trois ou un plus grand nombre d'événemens, un seul doit arriver ; mais rien ne porte à croire que l'un d'eux

arrivera plutôt que les autres. Dans cet état d'indécision, il nous est impossible de prononcer avec certitude sur leur arrivée. Il est cependant probable qu'un de ces événemens pris à volonté, n'arrivera pas; parce que nous voyons plusieurs cas également possibles qui excluent son existence, tandis qu'un seul la favorise.

La théorie des hasards consiste à réduire tous les événemens du même genre, à un certain nombre de cas également possibles, c'est-à-dire, tels que nous soyons également indécis sur leur existence; et à déterminer le nombre des cas *favorables* à l'événement dont on cherche la probabilité. Le rapport de ce nombre à celui de tous les cas possibles, est la mesure de cette probabilité qui n'est ainsi qu'une fraction dont le numérateur est le nombre des cas favorables, et dont le dénominateur est le nombre de tous les cas possibles.

La notion précédente de la probabilité suppose qu'en faisant croître dans le même rapport, le nombre des cas favorables, et celui de tous les cas possibles, la probabilité reste la même. Pour s'en convaincre, que l'on considère deux urnes A et B, dont la première contienne quatre boules blanches et deux noires, et dont la seconde ne renferme que deux boules blanches et une noire. On peut imaginer les

deux boules noires de la première urne, attachées à un fil qui se rompt au moment où l'on saisit l'une d'elles, et les quatre boules blanches formant deux systèmes semblables. Toutes les chances qui feront saisir l'une des boules du système noir, amèneront une boule noire. Si l'on conçoit maintenant que les fils qui unissent les boules, ne se rompent point; il est clair que le nombre des chances possibles ne changera pas, non plus que celui des chances favorables à l'extraction des boules noires; seulement, on tirera de l'urne, deux boules à-la-fois; la probabilité d'extraire une boule noire de l'urne, sera donc la même qu'auparavant. Mais alors, on a évidemment le cas de l'urne B, avec la seule différence, que les trois boules de cette dernière urne, sont remplacées par trois systèmes de deux boules invariablement unies. Ici les cas également possibles ne sont pas les extractions des boules; ce sont les chances qui les amènent et dont la somme supposée la même pour chaque urne, est répartie sur six boules dans la première, et sur trois dans la seconde.

Quand tous les cas sont favorables à un événement, sa probabilité se change en certitude, et son expression devient égale à l'unité. Sous ce rapport, la certitude et la probabilité sont comparables, quoiqu'il y ait une

différence essentielle entre les deux états de l'esprit, lorsqu'une vérité lui est rigoureusement démontrée, ou lorsqu'il aperçoit encore une petite source d'erreur.

Dans les choses qui ne sont que vraisemblables, la différence des données que chaque homme a sur elles, est une des causes principales de la diversité des opinions que l'on voit régner sur les mêmes objets. Supposons, par exemple, que l'on ait trois urnes A, B, C, dont l'une ne contienne que des boules noires, tandis que les deux autres ne renferment que des boules blanches. On doit tirer une boule de l'urne C, et l'on demande la probabilité que cette boule sera noire. Si l'on ignore quelle est celle des trois urnes, qui ne renferme que des boules noires, ensorte que l'on n'ait aucune raison de croire qu'elle est plutôt C, que B ou A; ces trois hypothèses paraîtront également possibles; et comme une boule noire ne peut être extraite que dans la première, la probabilité de l'extraire est égale à un tiers. Si l'on sait que l'urne A ne contient que des boules blanches, l'indécision ne porte plus alors que sur les urnes B et C, et la probabilité que la boule extraite de l'urne C sera noire, est un demi. Enfin cette probabilité se change en certitude, si l'on est assuré que les

urnes A et B ne contiennent que des boules blanches.

C'est ainsi que le même fait récité devant une nombreuse assemblée, obtient divers degrés de croyance, suivant l'étendue des connaissances des auditeurs. Si l'homme qui le rapporte, en est intimement persuadé, et si par son état et son caractère, il inspire une grande confiance; son récit, quelqu'extraordinaire qu'il soit, aura par rapport aux auditeurs dépourvus de lumières, le même degré de vraisemblance, qu'un fait ordinaire rapporté par le même homme, et ils lui ajouteront une foi entière. Cependant si quelqu'un d'eux a eu occasion d'entendre le même fait rejeté par d'autres hommes également respectables, il sera dans le doute; et le fait sera jugé faux, par les auditeurs éclairés qui le trouveront contraire, soit à des faits bien avérés, soit aux lois immuables de la nature.

C'est à l'influence de l'opinion de ceux que la multitude juge les plus instruits, et à qui elle a coutume de donner sa confiance sur les plus importans objets de la vie, qu'est due la propagation de ces erreurs qui, dans les temps d'ignorance, ont couvert la face du monde. L'astrologie nous en offre un grand exemple. Ces erreurs inculquées dès l'enfance, adoptées

sans examen, et n'ayant pour base que la croyance universelle, se sont maintenues pendant très-long-temps; jusqu'à ce qu'enfin le progrès des sciences les ait détruites dans l'esprit des hommes éclairés, dont ensuite l'opinion les a fait disparaître chez le peuple même, par le pouvoir de l'imitation et de l'habitude, qui les avait si généralement répandues. Ce pouvoir, le plus puissant ressort du monde moral, établit et conserve dans toute une nation, des idées entièrement contraires à celles qu'il maintient ailleurs avec le même empire. Quelle indulgence ne devons-nous donc pas avoir pour les opinions différentes des nôtres; puisque cette différence ne dépend souvent que des points de vue divers où les circonstances nous ont placés! Éclairons ceux que nous ne jugeons pas suffisamment instruits; mais auparavant, examinons sévèrement nos propres opinions, et pesons avec impartialité, leurs probabilités respectives.

La différence des opinions dépend encore de la manière dont chacun détermine l'influence des données qui lui sont connues. La théorie des probabilités tient à des considérations si délicates, qu'il n'est pas surprenant qu'avec les mêmes données, deux personnes trouvent des résultats différens, surtout dans

les questions très-compliquées. Exposons ici les principes généraux de cette théorie.

Principes généraux du Calcul des Probabilités.

Ier Principe. Le premier de ces principes est la définition même de la probabilité qui, comme on l'a vu, est le rapport du nombre des cas favorables, à celui de tous les cas possibles.

IIe Principe. Mais cela suppose les divers cas, également possibles. S'ils ne le sont pas, on déterminera d'abord leurs possibilités respectives dont la juste appréciation est un des points les plus délicats de la théorie des hasards. Alors la probabilité sera la somme des possibilités de chaque cas favorable. Éclaircissons ce principe par un exemple.

Supposons que l'on projette en l'air, une pièce large et très-mince dont les deux grandes faces opposées, que nous nommerons *croix* et *pile*, soient parfaitement semblables. Cherchons la probabilité d'amener *croix*, une fois au moins en deux coups. Il est clair qu'il peut arriver quatre cas également possibles, savoir, *croix* au premier et au second coup; *croix* au premier coup et *pile* au second; *pile* au premier coup et *croix* au second; enfin *pile*

aux deux coups. Les trois premiers cas sont favorables à l'événement dont on cherche la probabilité qui, par conséquent, est égale à $\frac{3}{4}$; ensorte qu'il y a trois contre un à parier que *croix* arrivera au moins une fois en deux coups.

On peut ne compter à ce jeu, que trois cas différens, savoir, *croix* au premier coup, ce qui dispense d'en jouer un second; *pile* au premier coup et *croix* au second; enfin *pile* au premier et au second coup. Cela réduirait la probabilité à $\frac{2}{3}$, si l'on considérait avec d'Alembert, ces trois cas, comme étant également possibles. Mais il est visible que la probabilité d'amener *croix* au premier coup est $\frac{1}{2}$, tandis que celle des deux autres cas est $\frac{1}{4}$. Le premier cas est un événement simple qui correspond aux deux événemens composés, *croix* au premier et au second coup, et *croix* au premier coup, *pile* au second. Maintenant, si conformément au second principe, on ajoute la possibilité $\frac{1}{2}$ de *croix* au premier coup, à la possibilité $\frac{1}{4}$ de *pile* arrivant au premier coup et *croix* au second; on aura $\frac{3}{4}$ pour la probabilité cherchée, ce qui s'accorde avec ce que l'on trouve dans la supposition où l'on joue les deux coups. Cette supposition ne change rien au sort de celui qui parie pour cet événement: elle sert seulement à

réduire les divers cas, à des cas également possibles.

IIIe Principe. Un des points les plus importans de la Théorie des Probabilités, et celui qui prête le plus aux illusions, est la manière dont les probabilités augmentent ou diminuent par leurs combinaisons mutuelles. Si les événemens sont indépendans les uns des autres, la probabilité de l'existence de leur ensemble, est le produit de leurs probabilités particulières. Ainsi la probabilité d'amener un as avec un seul dé, étant un sixième; celle d'amener deux as en projetant deux dés à-la-fois, est un trente-sixième. En effet, chacune des faces de l'un, pouvant se combiner avec les six faces de l'autre; il y a trente-six cas également possibles, parmi lesquels un seul donne les deux as. Généralement, la probabilité qu'un événement simple et dans les mêmes circonstances, arrivera de suite, un nombre donné de fois, est égale à la probabilité de cet événement simple, élevée à une puissance indiquée par ce nombre. Ainsi les puissances successives d'une fraction moindre que l'unité, diminuant sans cesse; un événement qui dépend d'une suite de probabilités fort grandes, peut devenir extrêmement peu vraisemblable. Supposons qu'un fait qui sans être extraordinaire, n'a aucune probabilité par lui-même, nous soit

transmis par vingt témoins, de manière que le premier l'ait transmis au second, le second au troisième, et ainsi de suite. Supposons encore que la probabilité de chaque témoignage soit égale à $\frac{9}{10}$: celle du fait sera moindre qu'un huitième; c'est-à-dire qu'il y aura plus de sept à parier contre un, qu'il est faux. On ne peut mieux comparer cette diminution de la probabilité, qu'à l'extinction de la clarté des objets, par l'interposition de plusieurs morceaux de verre; un nombre de morceaux peu considérable, suffisant pour dérober la vue d'un objet qu'un seul morceau laisse apercevoir d'une manière distincte. Les historiens ne paraissent pas avoir fait assez d'attention à cette dégradation de la probabilité des faits, lorsqu'ils sont vus à travers un grand nombre de générations successives : plusieurs événemens historiques, réputés certains, seraient au moins douteux, si on les soumettait à cette épreuve.

Dans les sciences purement mathématiques les conséquences les plus éloignées participent de la certitude du principe dont elles dérivent. Dans les applications de l'analyse à la physique, les conséquences ont toute la certitude des faits ou des expériences. Mais dans les sciences morales, où chaque conséquence n'est déduite de ce qui la précède, que d'une manière vraisemblable; quelque probables que

soient ces déductions, la chance de l'erreur croît avec leur nombre, et finit par surpasser la chance de la vérité, dans les conséquences très-éloignées du principe.

incipe. Quand deux événemens dépendent l'un de l'autre; la probabilité de l'événement composé est le produit de la probabilité du premier événement, par la probabilité que cet événement étant arrivé, l'autre aura lieu. Ainsi, dans le cas précédent de trois urnes A, B, C, dont deux ne contiennent que des boules blanches, et dont une ne renferme que des boules noires; la probabilité de tirer une boule blanche de l'urne C est $\frac{2}{3}$; puisque sur trois urnes, deux ne contiennent que des boules de cette couleur. Mais lorsqu'on a extrait une boule blanche, de l'urne C; l'indécision relative à celle des urnes qui ne renferme que des boules noires, ne portant plus que sur les urnes A et B; la probabilité d'extraire une boule blanche, de l'urne B est $\frac{1}{2}$; le produit de $\frac{2}{3}$ par $\frac{1}{2}$, ou $\frac{1}{3}$ est donc la probabilité d'extraire à-la-fois des urnes B et C, deux boules blanches.

On voit par cet exemple, l'influence des événemens passés sur la probabilité des événemens futurs. Car la probabilité d'extraire une boule blanche, de l'urne B, qui primitivement est $\frac{2}{3}$, se réduit à $\frac{1}{2}$, lorsqu'on a extrait

une boule blanche, de l'urne C : elle se changerait en certitude, si l'on avait extrait une boule noire, de la même urne. On déterminera cette influence, au moyen du principe suivant, qui est un corollaire du précédent.

Si l'on calcule *à priori*, la probabilité de l'événement arrivé, et la probabilité d'un événement composé de celui-ci et d'un autre qu'on attend ; la seconde probabilité divisée par la première, sera la probabilité de l'événement attendu, tirée de l'événement observé. Ve Principe.

Ici se présente la question agitée par quelques philosophes, touchant l'*influence* du passé sur la probabilité de l'avenir. Supposons qu'au jeu de *croix* et *pile*, *croix* soit arrivé plus souvent que *pile*. Par cela seul, nous serons portés à croire que dans la constitution de la pièce, il existe une cause constante qui le favorise. Ainsi, dans la conduite de la vie, le bonheur constant est une preuve d'habileté, qui doit faire employer de préférence les personnes heureuses. Mais si par l'instabilité des circonstances, nous sommes ramenés sans cesse, à l'état d'une indécision absolue ; si, par exemple, on change de pièce à chaque coup, au jeu de *croix* et *pile* ; le passé ne peut répandre aucune lumière sur l'avenir, et il serait absurde d'en tenir compte.

incipe. Chacune des causes auxquelles un événement observé, peut être attribué, est indiquée avec d'autant plus de vraisemblance, qu'il est plus probable que cette cause étant supposée exister, l'événement aura lieu; la probabilité de l'existence d'une quelconque de ces causes, est donc une fraction dont le numérateur est la probabilité de l'événement, résultante de cette cause, et dont le dénominateur est la somme des probabilités semblables relatives à toutes les causes: si ces diverses causes considérées *à priori*, sont inégalement probables; il faut au lieu de la probabilité de l'événement, résultante de chaque cause, employer le produit de cette probabilité, par celle de la cause elle-même. C'est le principe fondamental de cette branche de l'analyse des hasards, qui consiste à remonter des événemens aux causes.

Ce principe donne la raison pour laquelle on attribue les événemens réguliers, à une cause particulière. Quelques philosophes ont cru que ces événemens sont moins possibles que les autres, et qu'au jeu de *croix* et *pile*, par exemple, la combinaison dans laquelle *croix* arrive vingt fois de suite, est moins facile à la nature, que celles où *croix* et *pile* sont entre-mêlés d'une façon irrégulière. Mais cette opinion suppose que les événemens passés

influent sur la possibilité des événemens futurs, ce qui n'est point admissible. Les combinaisons régulières n'arrivent plus rarement, que parce qu'elles sont moins nombreuses. Si nous recherchons une cause, là où nous apercevons de la symétrie; ce n'est pas que nous regardions un événement symétrique, comme moins possible que les autres; mais cet événement devant être l'effet d'une cause régulière, ou celui du hasard, la première de ces suppositions est plus probable que la seconde. Nous voyons sur une table, des caractères d'imprimerie, disposés dans cet ordre, *Constantinople;* et nous jugeons que cet arrangement n'est pas l'effet du hasard, non parce qu'il est moins possible que les autres, puisque si ce mot n'était employé dans aucune langue, nous ne lui soupçonnerions point de cause particulière; mais ce mot étant en usage parmi nous, il est incomparablement plus probable qu'une personne aura disposé ainsi les caractères précédens, qu'il ne l'est que cet arrangement est dû au hasard.

C'est ici le lieu de définir le mot *extraordinaire.* Nous rangeons par la pensée, tous les événemens possibles, en diverses classes; et nous regardons comme *extraordinaires*, ceux des classes qui en comprennent un très-petit nombre. Ainsi, au jeu de *croix* et *pile*,

l'arrivée de *croix* cent fois de suite, nous paraît extraordinaire, parce que le nombre presqu'infini des combinaisons qui peuvent arriver en cent coups, étant partagé en séries régulières ou dans lesquelles nous voyons régner un ordre facile à saisir, et en séries irrégulières; celles-ci sont incomparablement plus nombreuses. La sortie d'une boule blanche, d'une urne qui, sur un million de boules, n'en contient qu'une seule de cette couleur, les autres étant noires, nous paraît encore extraordinaire; parce que nous ne formons que deux classes d'événemens, relatives aux deux couleurs. Mais la sortie du n° 79, par exemple, d'une urne qui renferme un million de numéros, nous semble un événement ordinaire; parce que comparant individuellement les numéros, les uns aux autres, sans les partager en classes, nous n'avons aucune raison de croire que l'un d'eux sortira plutôt que les autres.

De ce qui précède, nous devons généralement conclure que plus un fait est extraordinaire, plus il a besoin d'être appuyé de fortes preuves. Car ceux qui l'attestent, pouvant ou tromper, ou avoir été trompés, ces deux causes sont d'autant plus probables, que la réalité du fait l'est moins en elle-même. C'est ce que l'on verra particulièrement, lorsque

nous parlerons de la probabilité des témoignages.

La probabilité d'un événement futur est la somme des produits de la probabilité de chaque cause, tirée de l'événement observé, par la probabilité que cette cause existant, l'événement futur aura lieu. L'exemple suivant éclaircira ce principe. VIIe P

Imaginons une urne qui ne renferme que deux boules dont chacune soit ou blanche, ou noire. On extrait une de ces boules, que l'on remet ensuite dans l'urne, pour procéder à un nouveau tirage. Supposons que dans les deux premiers tirages, on ait amené des boules blanches; on demande la probabilité d'amener encore une boule blanche au troisième tirage.

On ne peut faire ici que ces deux hypothèses; ou l'une des boules est blanche, et l'autre, noire; ou toutes deux sont blanches. Dans la première hypothèse, la probabilité de l'événement observé est $\frac{1}{4}$; elle est l'unité ou la certitude dans la seconde. Ainsi, en regardant ces hypothèses, comme autant de causes, on aura par le sixième principe, $\frac{1}{5}$ et $\frac{4}{5}$ pour leurs probabilités respectives. Or si la première hypothèse a lieu, la probabilité d'extraire une boule blanche au troisième tirage est $\frac{1}{2}$; elle égale l'unité, dans la seconde hypothèse: en multipliant ces dernières probabilités, par

celles des hypothèses correspondantes, la somme des produits, ou $\frac{9}{10}$ sera la probabilité d'extraire une boule blanche au troisième tirage.

Quand la probabilité d'un événement simple est inconnue, on peut lui supposer également toutes les valeurs depuis zéro jusqu'à l'unité. La probabilité de chacune de ces hypothèses, tirée de l'événement observé, est par le sixième principe, une fraction dont le numérateur est la probabilité de l'événement dans cette hypothèse, et dont le dénominateur est la somme des probabilités semblables relatives à toutes les hypothèses. Ainsi la probabilité que la possibilité de l'événement est comprise dans des limites données, est la somme des fractions comprises dans ces limites. Maintenant, si l'on multiplie chaque fraction, par la probabilité de l'événement futur, déterminée dans l'hypothèse correspondante; la somme des produits relatifs à toutes les hypothèses sera par le septième principe, la probabilité de l'événement futur, tirée de l'événement observé. On trouve ainsi qu'un événement étant arrivé de suite, un nombre quelconque de fois; la probabilité qu'il arrivera encore la fois suivante, est égale à ce nombre augmenté de l'unité, divisé par le même nombre augmenté de deux unités. En faisant, par exemple,

remonter la plus ancienne époque de l'histoire, à cinq mille ans, ou à 1826213 jours, et le soleil s'étant levé constamment dans cet intervalle, à chaque révolution de vingt-quatre heures; il y a 1826214 à parier contre un, qu'il se levera encore demain. Mais ce nombre est incomparablement plus fort pour celui qui connaissant par l'ensemble des phénomènes, le principe régulateur des jours et des saisons, voit que rien dans le moment actuel, ne peut en arrêter le cours.

Buffon, dans son Arithmétique politique, calcule différemment la probabilité précédente. Il suppose qu'elle ne diffère de l'unité, que d'une fraction dont le numérateur est l'unité, et dont le dénominateur est le nombre deux élevé à une puissance égale au nombre des jours écoulés depuis l'époque. Mais la vraie manière de remonter des événemens passés, à la probabilité des causes et des événemens futurs, était inconnue à cet illustre écrivain.

De l'Espérance.

La probabilité des événemens sert à déterminer l'espérance ou la crainte des personnes intéressées à leur existence. Le mot *espérance* a diverses acceptions : il exprime gé-

néralement l'avantage de celui qui attend un bien quelconque, dans des suppositions qui ne sont que probables. Cet avantage, dans la théorie des hasards, est le produit de la somme espérée, par la probabilité de l'obtenir : c'est la somme partielle qui doit revenir, lorsqu'on ne veut point courir les risques de l'événement, en supposant que la répartition se fasse proportionnellement aux probabilités. Cette répartition est la seule équitable, lorsqu'on fait abstraction de toutes circonstances étrangères; parce qu'avec un égal degré de probabilité, on a un droit égal sur la somme espérée. Nous nommerons cet avantage, *espérance mathématique.*

ncipe. Lorsqu'il dépend de plusieurs événemens; on l'obtient, en prenant la somme des produits de la probabilité de chaque événement, par le bien attaché à son arrivée.

Appliquons ce principe à des exemples. Supposons qu'au jeu de *croix* et *pile*, Paul reçoive deux francs, s'il amène *croix* au premier coup, et cinq francs, s'il ne l'amène qu'au second. En multipliant deux francs, par la probabilité $\frac{1}{2}$ du premier cas, et cinq francs, par la probabilité $\frac{1}{4}$ du second cas; la somme des produits, ou deux francs et un quart sera l'avantage de Paul. C'est la somme qu'il doit donner d'avance à celui qui lui fait cet avantage;

car pour l'égalité du jeu, la mise doit être égale à l'avantage qu'il procure.

Si Paul reçoit deux francs, en amenant *croix* au premier coup, et cinq francs en l'amenant au second coup, soit qu'il l'ait ou non, amené au premier; alors la probabilité d'amener *croix* au second coup, étant $\frac{1}{2}$; en multipliant deux francs et cinq francs par $\frac{1}{2}$, la somme de ces produits, donnera trois francs et demi pour l'avantage de Paul, et par conséquent pour sa mise au jeu.

Dans une série d'événemens probables, dont les uns produisent un bien, et les autres, une perte; on aura l'avantage qui en résulte, en faisant une somme des produits de la probabilité de chaque événement favorable, par le bien qu'il procure; et en retranchant de cette somme, celle des produits de la probabilité de chaque événement défavorable, par la perte qui y est attachée. Si la seconde somme l'emporte sur la première, le bénéfice devient perte, et l'espérance se change en crainte. IXe Principe.

On doit toujours, dans la conduite de la vie, faire ensorte d'égaler au moins, le produit du bien que l'on espère, par sa probabilité, au produit semblable relatif à la perte. Mais il est nécessaire pour y parvenir, d'apprécier exactement les avantages, les pertes, et

leurs probabilités respectives. Il faut pour cela, une grande justesse d'esprit, un tact délicat, et une grande expérience des choses: il faut savoir se garantir des préjugés, des illusions de la crainte et de l'espérance, et de ces fausses idées de fortune et de bonheur, dont la plupart des hommes bercent leur amour-propre.

L'application des principes précédens, à la question suivante, a beaucoup exercé les géomètres. Paul joue à *croix* et *pile*, avec la condition de recevoir, deux francs, s'il amène *croix* au premier coup; quatre francs, s'il ne l'amène qu'au second; huit francs, s'il ne l'amène qu'au troisième, et ainsi de suite. Sa mise au jeu, doit être par le huitième principe, égale au nombre des coups; ensorte que si la partie continue à l'infini, la mise doit être infinie. Cependant, aucun homme raisonnable ne voudrait exposer à ce jeu, une somme même modique, cinquante francs, par exemple. D'où vient cette différence entre le résultat du calcul, et l'indication du sens commun? On reconnut bientôt, qu'elle tenait à ce que l'avantage moral qu'un bien nous procure, n'est pas proportionnel à ce bien, et qu'il dépend de mille circonstances souvent très-difficiles à définir, mais dont la plus générale et la plus importante est celle de la fortune. En effet,

il est visible qu'un franc a beaucoup plus de prix pour celui qui n'en a que cent, que pour un millionnaire. On doit donc dans le bien espéré, distinguer sa valeur absolue, de sa valeur relative. Celle-ci se règle sur les motifs qui le font desirer; au lieu que la première en est indépendante. On ne peut pas donner de principe général, pour apprécier cette valeur relative. En voici cependant un proposé par Daniel Bernoulli, et qui peut servir dans beaucoup de cas.

La valeur relative d'une somme infiniment petite, est égale à sa valeur absolue divisée par le bien total de la personne intéressée. Cela suppose que tout homme a un bien quelconque dont la valeur ne peut jamais être supposée nulle. En effet, celui même qui ne possède rien, donne toujours à son existence, une valeur au moins égale à ce qui lui est rigoureusement nécessaire pour vivre. Xe Principe.

Si l'on applique l'analyse, au principe que nous venons d'exposer; on obtient la règle suivante.

En désignant par l'unité, la partie de la fortune d'un individu, indépendante de ses expectatives; si l'on détermine les diverses valeurs que cette fortune peut recevoir en vertu de ces expectatives, et leurs probabilités; le produit de ces valeurs élevées respectivement

aux puissances indiquées par ces probabilités, sera la fortune physique qui procurerait à l'individu, le même avantage moral qu'il reçoit de la partie de sa fortune, prise pour unité, et de ses expectatives; en retranchant donc l'unité, de ce produit; la différence sera l'accroissement de la fortune physique, dû aux expectatives : nous nommerons cet accroissement, *espérance morale.* Il est facile de voir qu'elle coïncide avec l'espérance mathématique, lorsque la fortune prise pour unité, devient infinie par rapport aux variations qu'elle reçoit des expectatives. Mais lorsque ces variations sont une partie sensible de cette unité, les deux espérances peuvent différer très-sensiblement entre elles.

Cette règle conduit à des résultats conformes aux indications du sens commun, que l'on peut à ce moyen, apprécier avec quelqu'exactitude. Ainsi dans la question précédente, on trouve que si la fortune de Paul est de deux cents francs, il ne doit pas raisonnablement mettre au jeu plus de neuf francs. La même règle conduit encore à répartir le danger, sur plusieurs parties d'un bien que l'on espère, plutôt que d'exposer ce bien tout entier au même danger. Il en résulte pareillement, qu'au jeu le plus égal, la perte est toujours relativement plus grande que le gain;

car le produit de la fortune prise pour unité, augmentée du gain et élevée à une puissance égale à la probabilité du gain, par cette unité diminuée de la perte, et élevée à une puissance égale à la probabilité de la perte, est toujours moindre que la fortune du joueur avant sa mise au jeu. En supposant par exemple, cette fortune, de cent francs, et que le joueur en expose cinquante au jeu de *croix* et *pile;* sa fortune après sa mise au jeu, peut être en vertu de son expectative, ou de cent cinquante francs, ou seulement de cinquante: la probabilité de chacun de ces deux cas est $\frac{1}{2}$; cette fortune est donc par la règle précédente, égale à la racine carrée du produit de cent cinquante, par cinquante; elle est ainsi réduite à quatre-vingt-sept francs, c'est-à-dire que cette dernière somme procurerait au joueur, le même avantage moral, que l'état de sa fortune après sa mise. Le jeu est donc désavantageux, dans le cas même où la mise est égale au produit de la somme espérée, par sa probabilité. On peut juger par là de l'immoralité des jeux dans lesquels la somme espérée est au-dessous de ce produit. Ils ne subsistent que par les faux raisonnemens et la cupidité qu'ils fomentent, et qui portant le peuple à sacrifier son nécessaire, à des espérances chimériques dont il est hors d'état d'apprécier

l'invraisemblance, sont la source d'une infinité de maux.

Des Méthodes analytiques du Calcul des Probabilités.

L'application des principes que nous venons d'exposer, aux diverses questions de probabilités, exige des méthodes dont la recherche a donné naissance à plusieurs branches de l'analyse, et spécialement à la théorie des combinaisons, et au calcul des différences finies.

Si l'on forme le produit des binomes, l'unité plus une première lettre, l'unité plus une seconde lettre, l'unité plus une troisième lettre, et ainsi de suite jusqu'à n lettres ; en retranchant l'unité de ce produit développé, on aura la somme des combinaisons de toutes ces lettres prises une à une, deux à deux, trois à trois, etc. : chaque combinaison aura pour coefficient, l'unité. Pour avoir le nombre des combinaisons de ces n lettres prises r à r, on observera que si on suppose les lettres égales entre elles, le produit précédent deviendra la puissance $n^{ième}$ du binome, un plus la première lettre; et le nombre des combinaisons des n lettres prises r à r, sera le coefficient de la puissance $r^{ième}$ de la première lettre,

dans le développement de ce binome; on aura donc ce nombre, par la formule connue du binome.

Si l'on veut avoir égard à la situation respective des lettres, dans chaque combinaison; on doit observer qu'en joignant une seconde lettre à la première, on peut la placer au premier et au second rang; ce qui donne deux combinaisons. Si l'on joint à ces combinaisons, une troisième lettre; on peut lui donner dans chaque combinaison, le premier, le second et le troisième rang; ce qui forme trois combinaisons relatives à chacune des deux autres, en tout, six combinaisons. De là, il est aisé de conclure que le nombre des arrangemens différens que l'on peut donner à r lettres, est le produit des nombres depuis l'unité jusqu'à r. Il faut donc pour avoir égard à la situation respective des lettres, multiplier par ce produit, le nombre des combinaisons des n lettres prises r à r; ce qui revient à supprimer le dénominateur du coefficient du terme du binome, qui exprime ce nombre.

Supposons une loterie composée de n numéros, et qu'il en sorte r à chaque tirage; on demande la probabilité de la sortie de s numéros donnés, dans un tirage. Pour y parvenir, on déterminera d'abord le nombre des combinaisons des autres numéros pris r moins

s, à *r* moins *s*; car il est clair qu'en ajoutant les *s* numéros donnés, à chacune de ces combinaisons, on aura la somme de toutes les combinaisons des *n* lettres prises *r* à *r*, et dans lesquels les *s* numéros donnés entrent. Si l'on divise ce nombre, par celui des combinaisons de toutes les lettres prises *r* à *r*; on aura la probabilité demandée. On trouve ainsi que cette probabilité est le rapport du nombre des combinaisons de *r* lettres prises *s* à *s*, au nombre des combinaisons de *n* lettres prises *s* à *s*.

On peut d'après ce théorème, calculer les chances de la loterie de France, et en conclure ses bénéfices. Cette loterie est, comme on sait, composée de 90 numéros, dont cinq sortent à chaque tirage. La probabilité de la sortie d'un extrait donné, est en vertu de ce théorème, égale à $\frac{5}{90}$ ou $\frac{1}{18}$; la loterie devrait donc alors pour l'égalité du jeu, rendre dix-huit fois la mise. Le nombre total des combinaisons deux à deux, de 90 numéros est 4005, et il en sort dix à chaque tirage; ainsi la probabilité de la sortie d'un ambe donné est $\frac{10}{4005}$; la loterie devrait donc pour un ambe sorti, rendre quatre cents fois et demie, la mise. On trouve pareillement qu'elle devrait rendre la mise, 11748 fois pour un terne, 511038 fois pour un quaterne, et 43949268

fois pour un quine. La loterie est loin de faire ces avantages aux joueurs.

Supposons encore dans une urne, n boules que l'on puisse également extraire une à une, deux à deux, trois à trois, etc.; on a fait une de ces extractions, et l'on demande la probabilité que le nombre des boules extraites est impair. Il suit de ce qui précède, que si l'on élève le binome, un plus un, à la puissance n; les termes, second, troisième, etc., exprimeront les nombres de combinaisons des n boules, prises une à une, deux à deux, etc.; ainsi la totalité des combinaisons sera la puissance $n^{ième}$ de deux, moins l'unité : la somme des termes second, quatrième, sixième, etc. du développement du binome, sera le nombre des combinaisons impaires : elle sera visiblement, la moitié de la différence des $n^{ième}$ puissances des binomes un plus un, et un moins un; ou la moitié de la $n^{ième}$ puissance de deux. En retranchant l'unité, de cette quantité, on aura le nombre des combinaisons paires; et en divisant ces deux nombres de combinaisons, par leur somme, on aura les probabilités respectives des combinaisons impaires et paires. On voit ainsi qu'il y a de l'avantage à parier plutôt pour un nombre impair de boules extraites, que pour un nombre pair.

Mais la méthode la plus générale et la plus

directe de résoudre les questions de probabilité, consiste à les faire dépendre d'équations aux différences. En comparant les états consécutifs de la fonction des variables, qui exprime la probabilité, lorsqu'on fait croître ces variables, de leurs différences respectives; la question proposée fournit le plus souvent, un rapport très-simple entre les divers états de cette fonction. Ce rapport est ce que l'on nomme *équation aux différences ordinaires ou partielles ;* ordinaires, lorsqu'il n'y a qu'une variable; partielles, lorsqu'il y en a plusieurs. Donnons en quelques exemples.

Trois joueurs dont les forces sont supposées les mêmes, jouent ensemble aux conditions suivantes. Celui des deux premiers joueurs qui gagne son adversaire, joue avec le troisième, et s'il le gagne, la partie est finie. S'il est vaincu, le vainqueur joue avec l'autre, et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'un des joueurs ait gagné consécutivement les deux autres ; ce qui termine la partie. On demande la probabilité que cette partie sera finie dans un nombre donné de coups. Cherchons d'abord la probabilité qu'elle finira précisément à un coup déterminé, par exemple, au dixième coup. Pour cela, le joueur qui la gagne, doit entrer au jeu au neuvième coup, et le gagner ainsi que le coup suivant. Mais si au lieu de

gagner le neuvième coup, il était vaincu par son adversaire; comme celui-ci a déja gagné l'autre joueur, la partie finirait à ce coup; ainsi la probabilité qu'un joueur entrera au jeu au neuvième coup, et le gagnera, est égale à celle que la partie finira précisément à ce coup; et comme ce joueur doit gagner le coup suivant, pour que la partie se termine au dixième coup, cette dernière probabilité ne sera qu'un demi de la précédente. Il suit de là que si l'on considère cette probabilité, comme une fonction du numéro du coup auquel elle doit finir; cette fonction sera la moitié de la même fonction dans laquelle on a diminué le numéro ou la variable, d'une unité. Cette égalité forme une de ces équations que l'on nomme *équations aux différences finies ordinaires*.

On peut déterminer facilement à son moyen, la probabilité que la partie finira précisément à un coup quelconque. Il est visible que la partie ne peut finir au plutôt, qu'au second coup; et pour cela, il est nécessaire que celui des deux premiers joueurs qui gagne son adversaire, gagne au second coup, le troisième joueur. Ainsi la probabilité que la partie finira à ce coup, est $\frac{1}{2}$. De là, en vertu de l'équation précédente, on conclut que les probabilités successives de la fin de la partie, sont $\frac{1}{4}$ pour le troisième coup, $\frac{1}{8}$ pour le quatrième, etc.,

et généralement $\frac{1}{2}$ élevé à une puissance moindre de l'unité, que le numéro du coup. Maintenant, si l'on prend la somme de toutes ces puissances, depuis la première jusqu'à cette dernière inclusivement; on aura la probabilité que la partie sera terminée dans le nombre de coups indiqué par ce numéro, égale à l'unité moins la dernière de ces puissances de $\frac{1}{2}$.

Considérons encore le premier problème que l'on ait résolu sur les probabilités, et que Pascal proposa de résoudre à Fermat. Deux joueurs A et B, dont les adresses sont égales, jouent ensemble à cette condition que celui qui le premier, aura vaincu l'autre un nombre donné de fois, gagnera la partie, et emportera la somme des mises au jeu. Après quelques coups, les joueurs conviennent de se retirer sans avoir terminé la partie; on demande de quelle manière ils doivent se partager cette somme. Il est visible que leurs parts doivent être proportionnelles à leurs probabilités respectives de gagner la partie; la question se réduit donc à déterminer ces probabilités. Elles dépendent évidemment des nombres de points qui manquent à chaque joueur, pour atteindre le nombre donné; ainsi la probabilité de A est une fonction de ces deux nombres que nous regarderons comme autant de variables.

Si les deux joueurs convenaient de jouer un coup de plus (convention qui ne change en rien leur sort); ou A le gagnerait, et alors le nombre des points qui lui manque, serait diminué d'une unité; ou le joueur B gagnerait ce nouveau coup, et alors le nombre des points qui manquent à ce dernier joueur, serait diminué d'une unité; mais la probabilité de chacun de ces cas est $\frac{1}{2}$; la fonction cherchée est donc égale à la moitié de cette fonction dans laquelle on diminue d'une unité, la première variable, plus à la moitié de la même fonction dans laquelle on diminue la seconde variable, d'une unité. Cette égalité est une de ces équations que l'on nomme *équations aux différences partielles*.

On peut déterminer à son moyen, les probabilités de A, en partant des plus petits nombres, et en observant que la probabilité ou la fonction qui l'exprime, est égale à l'unité, lorsqu'il ne manque aucun point au joueur A, ou lorsque la première variable est nulle; et que cette fonction devient nulle avec la seconde variable. En supposant ainsi qu'il ne manque qu'un point au joueur A, on trouve que sa probabilité est $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{8}$, etc., suivant qu'il manque à B, un point, ou deux, ou trois, etc. Généralement, elle est alors égale à l'unité, moins $\frac{1}{2}$ élevé à une puissance égale

au nombre des points qui manquent à B. On supposera ensuite qu'il manque deux points au joueur A, et l'on trouvera sa probabilité égale à $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{11}{16}$, etc., suivant qu'il manque à B, un point, ou deux, ou trois, etc. On supposera encore qu'il manque trois points au joueur A, et ainsi de suite.

Cette manière d'obtenir les valeurs successives d'une quantité, au moyen de son équation aux différences, est longue et pénible; et les géomètres ont cherché des méthodes pour avoir la fonction générale des variables qui satisfait à cette équation, ensorte que l'on n'ait besoin pour chaque cas particulier, que de substituer dans cette fonction, les valeurs correspondantes des variables. Considérons cet objet d'une manière générale. Pour cela, concevons une suite de termes disposés sur une ligne horizontale, et tels que chacun d'eux dérive des précédens, suivant une loi donnée : supposons cette loi exprimée par une équation entre plusieurs termes consécutifs, et leur indice, ou le nombre qui indique le rang qu'ils occupent dans la série : cette équation est ce que je nomme *équation aux différences finies à un seul indice variable.* L'ordre ou le degré de cette équation est la différence du rang de ses deux termes extrêmes. On peut, à son moyen, déterminer

successivement les termes de la série, et la continuer indéfiniment; mais il faut pour cela, connaître un nombre de termes de la série, égal au degré de l'équation. Ces termes sont les constantes arbitraires de l'expression du terme général de la série, ou de l'intégrale de l'équation aux différences.

Concevons maintenant, au-dessus des termes de la série précédente, une seconde série de termes disposés horizontalement; concevons encore, au-dessus des termes de la seconde série, une troisième série horizontale, et ainsi de suite à l'infini, et supposons les termes de toutes ces séries, liés par une équation générale entre plusieurs termes consécutifs, pris tant dans le sens horizontal, que dans le sens vertical, et les nombres qui indiquent leur rang dans les deux sens. Cette équation est ce que je nomme *équation aux différences finies partielles à deux indices variables*.

Concevons pareillement au-dessus du plan qui renferme les séries précédentes, un second plan renfermant des séries semblables, dont les termes soient placés respectivement au-dessus de ceux que contient le premier plan. Concevons ensuite au-dessus de ce second plan, un troisième plan renfermant des séries semblables, et ainsi à l'infini. Supposons

tous les termes de ces séries, liés par une équation entre plusieurs termes consécutifs, pris tant dans le sens de la longueur, que dans les sens de la largeur et de la profondeur, et les trois nombres qui indiquent leur rang dans ces trois sens. Cette équation est ce que je nomme *équation aux différences finies partielles à trois indices variables*.

Enfin, en considérant la chose d'une manière abstraite et indépendante des dimensions de l'espace, concevons généralement un système de grandeurs qui soient fonctions d'un nombre quelconque d'indices variables, et supposons entre ces grandeurs, leurs différences relatives à ces indices et les indices eux-mêmes, autant d'équations qu'il y a de ces grandeurs; ces équations seront aux différences finies partielles à un nombre quelconque d'indices variables.

On peut à leur moyen, déterminer successivement ces grandeurs. Mais de même que l'équation à un seul indice, exige que l'on connaisse un certain nombre de termes de la série; de même l'équation à deux indices exige que l'on connaisse une ou plusieurs lignes de séries, dont les termes généraux peuvent chacun être exprimés par une fonction arbitraire d'un des indices. Pareillement, l'équation à trois indices exige que l'on connaisse un ou

plusieurs plans de séries, dont les termes généraux peuvent être exprimés chacun par une fonction arbitraire de deux indices, et ainsi de suite. Dans tous ces cas, on pourra, par des éliminations successives, déterminer un terme quelconque des séries. Mais toutes les équations entre lesquelles on élimine, étant comprises dans un même système d'équations générales; toutes les expressions des termes successifs que l'on obtient par ces éliminations, doivent être comprises dans une expression générale, fonction des indices qui déterminent le rang du terme. Cette expression est l'intégrale de l'équation proposée aux différences, et sa recherche est l'objet du calcul intégral. Parmi les méthodes imaginées pour y parvenir, celle qui me paraît être la plus générale et la plus simple, est fondée sur la considération *des fonctions génératrices* dont voici l'idée.

Si l'on conçoit une fonction A d'une variable, développée dans une série ascendante par rapport aux puissances de cette variable; le coefficient de l'une quelconque de ces puissances sera fonction de l'indice ou exposant de cette puissance. A est ce que je nomme *fonction génératrice* de ce coefficient, ou de la fonction de l'indice.

Maintenant, si l'on multiplie la série A, par

une fonction linéaire de la variable, telle, par exemple, que l'unité plus deux fois cette variable; le produit sera une nouvelle fonction génératrice dans laquelle le coefficient d'une puissance quelconque de la variable, sera égal au coefficient de la même puissance dans A, plus au double du coefficient de la puissance inférieure d'une unité. Ainsi la fonction de l'indice dans le produit, égalera la fonction de l'indice dans A, plus le double de cette même fonction dans laquelle l'indice est diminué de l'unité. Cette fonction de l'indice dans le développement du produit, peut ainsi être envisagée, comme une dérivée de la fonction de l'indice dans A, dérivée que l'on peut exprimer par une caractéristique placée devant cette dernière fonction. La dérivation indiquée par la caractéristique, dépend de la fonction multiplicateur, que nous désignerons généralement par B, et que nous supposerons développée comme A, par rapport aux puissances de la variable.

Si l'on multiplie de nouveau par B, le produit de A par B, ce qui revient à multiplier A par le carré de B; on formera une troisième fonction génératrice dans laquelle le coefficient d'une puissance quelconque de la variable, sera une dérivée semblable du coefficient correspondant dans le premier produit; on pourra

donc l'exprimer par la même caractéristique placée devant la dérivée précédente, et alors cette caractéristique sera deux fois écrite devant le coefficient correspondant dans la série A; mais au lieu de l'écrire ainsi deux fois, on lui donne pour exposant, le nombre deux.

En continuant de cette manière, on voit généralement que si l'on multiplie A par une puissance $n^{ième}$ de B, on aura le coefficient d'une puissance quelconque de la variable dans le produit, en plaçant devant le coefficient correspondant de A, la caractéristique avec n pour exposant.

Supposons que B soit l'unité divisée par la variable; alors dans le produit de A par B, le coefficient d'une puissance de la variable, sera le coefficient de la puissance supérieure d'une unité dans A; d'où il suit que dans le produit de A par la puissance $n^{ième}$ de B, ce coefficient sera celui de la puissance supérieure d'un nombre n d'unités dans A.

Si B est égal à, moins un plus l'unité divisée par la variable; alors dans le produit de A par B, le coefficient de la variable sera le coefficient de la puissance supérieure d'une unité dans A, moins le coefficient de cette puissance; il sera donc la différence finie de ce dernier coefficient dans lequel on fait varier l'indice, de l'unité. Ainsi dans le produit de A

par la puissance $n^{ième}$ de B, le coefficient sera la différence $n^{ième}$ du coefficient correspondant dans A.

B étant une fonction de la variable, et C étant une autre fonction de la même variable; on pourra considérer B, comme une fonction de C, développée dans une série ordonnée par rapport aux puissances de C; le produit de A par cette série, sera donc identiquement égal au produit de A par B; et les coefficiens d'une même puissance de la variable, seront identiquement égaux dans ces deux produits. Mais le premier de ces coefficiens est formé d'une suite de termes correspondans aux produits de A par les diverses puissances de C. Dans le produit de A par C, ce coefficient est une nouvelle dérivée du coefficient correspondant dans A, dérivée que nous exprimerons par une nouvelle caractéristique placée devant ce dernier coefficient. En changeant donc les diverses puissances de C, dans cette nouvelle caractéristique affectée d'exposans égaux à ceux de ces puissances, et placée devant le coefficient correspondant de A; en multipliant ensuite par ce coefficient, le terme indépendant de C, dans la série précédente; on aura le coefficient relatif au produit de A par le développement de B, suivant les puissances de C. Si l'on égale ce coefficient, à celui

qui est relatif au produit de A par B, et qui est exprimé par la première caractéristique placée devant le coefficient correspondant de A; on aura l'expression de la dérivée indiquée par cette caractéristique, dans une série ordonnée suivant les exposans de la nouvelle caractéristique. On voit que pour former cette série, c'est-à-dire pour repasser des fonctions génératrices à leurs coefficiens, il suffit de substituer dans B considéré comme fonction de C, la nouvelle caractéristique, à la place de C; de développer ensuite B, dans une série ordonnée par rapport aux puissances de cette caractéristique; enfin d'écrire le coefficient d'une puissance indéterminée de la variable dans A, à la suite de chaque puissance de la caractéristique, et après le premier terme de la série. Ainsi ce coefficient étant une fonction quelconque de l'indice de la puissance de la variable; la transformation d'une dérivée de cette fonction, indiquée par une première caractéristique, dans une série ordonnée par rapport aux exposans successifs de la caractéristique d'une nouvelle dérivée de la même fonction, se réduit aux opérations algébriques du développement des fonctions en séries.

Si l'on suppose B égal à l'unité divisée par la variable, et C égal à cette fraction moins un; B sera égal à l'unité plus C, et le produit

de A par la $n^{ième}$ puissance de B, sera égal au produit de A par le développement de la puissance $n^{ième}$ du binome, un plus C; or le coefficient d'une puissance quelconque de la variable, dans le produit de A par B élevé à la $n^{ième}$ puissance, est, comme on l'a vu, le coefficient de la puissance supérieure de n unités, dans A; et ce même coefficient dans le produit de A par une puissance de C, est la différence du même ordre, du coefficient correspondant dans A; une fonction quelconque de l'indice augmenté de n, est donc égale aux coefficiens des termes du développement de la puissance $n^{ième}$ du binome, multipliés respectivement par la fonction elle-même, et ses différences successives; ce qui donne l'interpolation des séries, au moyen des différences de leurs termes successifs.

B étant toujours supposé égal à l'unité divisée par la variable, et C étant une fonction quelconque de cette variable; C sera la même fonction du quotient de l'unité divisée par B. Si de là on tire l'expression de la puissance $n^{ième}$ de B, dans une série développée suivant les puissances de C; on aura en repassant des fonctions génératrices aux coefficiens, une fonction quelconque de l'indice augmenté de n, égale à une série dont le premier terme sera le premier terme de la série précédente,

multiplié par la fonction elle-même; et dont les suivans seront ceux de la même série, dans lesquels, au lieu des puissances de C, on écrit les mêmes puissances de la caractéristique relative à C, suivies de la fonction. Si l'on suppose un des termes de cette nouvelle série, égal à zéro; tous les termes suivans seront nuls, et la somme des termes précédens sera l'expression de la fonction de l'indice augmenté de l'indéterminée n; cette expression sera l'intégrale complète de l'équation aux différences, indiquée par l'égalité du terme de la série, à zéro; on a ainsi la méthode la plus simple d'intégrer ce genre d'équations.

Concevons présentement que A soit une fonction de deux variables, (ce que nous allons dire, s'étend à un nombre quelconque de variables). En la développant dans une série ordonnée par rapport aux puissances de ces variables, et à leurs produits; le coefficient du produit de deux puissances quelconques dans ce développement, sera une fonction des indices de ces puissances, dont A sera la fonction génératrice.

Si l'on multiplie A par une autre fonction B de ces deux variables; le coefficient des deux mêmes puissances dans le produit, sera une fonction dérivée du coefficient précédent, dérivée que l'on pourra exprimer par une

caractéristique placée devant ce coefficient. On verra, comme ci-dessus, que le coefficient correspondant, dans le produit de A par une puissance quelconque de B, sera exprimé par cette caractéristique, toujours placée devant le coefficient relatif à A, et à laquelle on donne pour exposant, celui de la puissance de B. De là résultent des théorèmes analogues à ceux qui sont relatifs à une seule variable. On pourra développer d'une manière semblable, une fonction quelconque des deux indices augmentés respectivement des nombres n et n', dans une série ordonnée par rapport aux puissances d'une caractéristique, placées devant la fonction sans accroissement d'indices; et dont le premier terme est cette fonction elle-même. Si l'un des termes de cette série, est égal à zéro; tous les termes suivans le seront pareillement, et la somme des termes précédens sera l'expression de la fonction des deux indices augmentés respectivement des indéterminées n et n' : cette expression sera l'intégrale de l'équation aux différences finies partielles, donnée par cette égalité.

Il existe toujours une fonction des variables, telle qu'en la développant en série, les coefficiens des produits de leurs puissances ont entre eux, la relation donnée par une équation aux différences partielles. Cette fonction que

j'ai nommée *fonction génératrice* de l'équation proposée, est souvent facile à obtenir : toutes les manières de la développer en série, donneront l'intégrale de cette équation, sous des formes diverses plus ou moins commodes selon les circonstances.

Si l'on a une série ordonnée par rapport aux puissances d'une variable, et telle que le coefficient de chaque puissance soit, par exemple, la moitié du coefficient de la puissance précédente; on pourra concevoir l'intervalle des deux premiers termes, rempli d'une infinité de termes dans lesquels les puissances de la variable croîtront par degrés infiniment petits, depuis zéro jusqu'à l'unité, et auront des coefficiens arbitraires. Les intervalles des termes consécutifs suivans, seront pareillement remplis d'une infinité d'autres termes, mais dépendans des premiers, de manière que le coefficient d'une puissance de la variable, soit la moitié du coefficient de la puissance moindre d'une unité. Le plus communément, on suppose les intervalles des premiers termes de chaque série, remplis par des ordonnées paraboliques ; alors les autres intervalles sont remplis d'ordonnées semblables, liées aux précédentes, par la loi générale de la série qui renferme ainsi toutes les puissances entières et fractionnaires de la variable.

Supposons maintenant que A soit une série semblable, et que B soit égal à, moins un plus l'unité divisée par une puissance i entière ou fractionnaire de la variable. En représentant par un plus C, l'unité divisée par la variable; B sera égal à la quantité suivante, moins un plus la puissance i du binome, un plus C. Si l'on multiplie par A, la puissance $n^{ième}$ de cette quantité; on aura un produit identiquement égal à celui de A par la puissance $n^{ième}$ de B. Si l'on développe ces puissances; on repassera des fonctions génératrices, aux coefficiens, 1° en changeant la puissance $n^{ième}$ de B, multipliée par A, dans la différence $n^{ième}$ de la fonction de l'indice, relative à A, i étant l'accroissement de l'indice; 2° en changeant pareillement le produit de A par une puissance de C d'un ordre quelconque, dans une différence du même ordre, de la même fonction de l'indice, l'unité étant l'accroissement de l'indice. On aura donc la différence $n^{ième}$ d'une fonction quelconque de l'indice dont i est l'accroissement, exprimée par une série des différences de la même fonction, dans lesquelles l'unité est l'accroissement de l'indice. On peut ainsi transformer la caractéristique relative à un accroissement de l'indice, dans une série de caractéristiques relatives à un autre accroissement.

On voit dans tout ce qui précède, que les opérations algébriques relatives aux transformations des fonctions, se transportent aux caractéristiques, en leur donnant pour exposans, ceux des quantités qui leur correspondent. Cette analogie remarquable et féconde des puissances et des caractéristiques, avait été aperçue par Leibnitz dans les expressions différentielles. Lagrange, en suivant cet aperçu de Leibnitz dans tous ses développemens, en a tiré des formules aussi curieuses qu'utiles pour l'analyse, mais sans en donner les démonstrations qu'il regardait comme difficiles. La théorie des fonctions génératrices ne laisse rien à desirer à cet égard, et de plus elle étend à des caractéristiques quelconques, l'analogie que ces deux grands géomètres n'avaient observée que relativement aux puissances et aux différences.

Si l'on suppose les accroissemens des indices, infiniment petits; les résultats relatifs à leurs accroissemens finis, subsisteront toujours, et se simplifieront en rejetant les infiniment petits d'un ordre supérieur à celui que l'on conserve. Ces passages du fini à l'infiniment petit, ont l'avantage d'éclairer les points délicats de l'analyse infinitésimale, qui ont été l'objet de grandes discussions parmi les géomètres. C'est ainsi que j'ai démontré

la possibilité d'introduire des fonctions discontinues, dans les intégrales des équations aux différentielles partielles; pourvu que la discontinuité n'ait lieu que pour les différentielles des fonctions, de l'ordre de ces équations. Les résultats transcendans du calcul sont, comme toutes les abstractions de l'entendement, des signes généraux dont on ne peut connaître la véritable étendue, qu'en remontant par l'analyse métaphysique, aux idées élémentaires qui y ont conduit; ce qui présente souvent de grandes difficultés; car l'esprit humain en éprouve moins encore à se porter en avant, qu'à se replier sur lui-même.

Le passage du fini à l'infiniment petit, répand un grand jour sur la métaphysique du calcul différentiel. On voit clairement par ce passage, que ce calcul n'est que la comparaison des coefficiens des mêmes puissances des différentielles, dans le développement en série, de fonctions identiquement égales des indices augmentés respectivement de différentielles indéterminées. Les quantités que l'on néglige comme étant d'un ordre d'infiniment petits, supérieur à celui que l'on conserve, et qui semblent par cette omission, ôter à ce calcul la rigueur de l'algèbre, ne sont que des puissances de ces différentielles, d'un ordre

supérieur à celui des puissances dont on compare les coefficiens, et qui par là, doivent être rejetées de cette comparaison; ensorte que le calcul différentiel a toute l'exactitude des autres opérations algébriques. Mais dans ses applications à la géométrie et à la mécanique, il est indispensable d'introduire le principe des limites. Par exemple, la soutangente d'une courbe étant la limite géométrique de la sousécante, ou la ligne dont celle-ci approche sans cesse, à mesure que les points d'intersection de la sécante et de la courbe se rapprochent; l'expression analytique de la soutangente, doit être pareillement la limite de l'expression analytique de la sousécante; elle est, par conséquent, égale au premier terme de cette dernière expression développée suivant les puissances de l'intervalle qui sépare les deux points d'intersection.

On peut encore envisager la tangente, comme la droite dont l'équation approche le plus de celle de la courbe, près du point de contingence. L'ordonnée de cette courbe, étant une fonction de l'abscisse; si à partir de ce point, on fait croître l'abscisse, d'une quantité indéterminée, et qu'on développe la fonction suivant les puissances de cette indéterminée; il est visible que la somme des deux premiers termes de ce développement,

sera l'ordonnée de la droite la plus approchante de la courbe ; conséquemment, elle sera l'ordonnée de la tangente : le coefficient de l'indéterminée dans le second terme, exprimera le rapport de l'ordonnée à la soutangente. Il est facile de prouver par le principe des limites, que toute autre droite menée par le point de contingence, entrerait dans la courbe près de ce point.

Cette manière singulièrement heureuse de parvenir à l'expression des soutangentes, est due à Fermat qui l'a étendue aux courbes transcendantes. Ce grand géomètre exprime par la caractéristique E, l'accroissement de l'abscisse ; et en ne considérant que la première puissance de cet accroissement, il détermine exactement comme on le fait par le calcul différentiel, les soutangentes des courbes, leurs points d'inflexion, les *maxima* et *minima* de leurs ordonnées, et généralement ceux des fonctions rationnelles. On voit même par sa belle solution du problème de la réfraction de la lumière, en supposant qu'elle parvient d'un point à un autre dans le temps le plus court, et qu'elle se meut dans les divers milieux diaphanes avec différentes vîtesses, on voit dis-je, qu'il savait étendre sa méthode, aux fonctions irrationnelles, en se débarrassant des irrationnalités, par

l'élévation des radicaux aux puissances. On doit donc regarder Fermat, comme le véritable inventeur du calcul différentiel. Newton a depuis rendu ce calcul, plus analytique, dans sa Méthode des Fluxions; et il en a simplifié et généralisé les procédés, par son beau théorème du binome. Enfin presqu'en même temps, Leibnitz a enrichi le calcul différentiel, d'une notation qui en indiquant le passage du fini à l'infiniment petit, réunit à l'avantage d'exprimer les résultats rigoureux de ce calcul, celui de donner les premières valeurs approchées des différences et des sommes des quantités; notation qui s'est adaptée d'elle-même au calcul des différentielles partielles. La langue de l'analyse, la plus parfaite de toutes les langues, étant par elle-même un puissant instrument de découvertes; ses notations, lorsqu'elles sont nécessaires et heureusement imaginées, sont des germes de nouveaux calculs. Ainsi, la simple idée qu'eut Descartes, d'indiquer les puissances représentées par des lettres, en écrivant vers le haut de ces lettres, les nombres qui expriment les degrés de ces puissances, a donné naissance au calcul exponentiel; et Leibnitz a été conduit par sa notation, à l'analogie singulière des puissances et des différentielles. Le calcul des fonctions génératrices, qui, comme on l'a vu, donne la véritable origine

de cette analogie, offre tant d'exemples de ce transport des exposans des puissances aux caractéristiques, qu'il peut encore être envisagé comme le calcul exponentiel des caractéristiques.

On est souvent conduit à des expressions qui contiennent tant de termes et de facteurs, que les substitutions numériques y sont impraticables. C'est ce qui a lieu dans les questions de probabilité, lorsque l'on considère un grand nombre d'événemens. Cependant il importe alors d'avoir la valeur numérique des formules, pour connaître avec quelle probabilité, les résultats que les événemens développent en se multipliant, sont indiqués. Il importe surtout d'avoir la loi suivant laquelle cette probabilité approche sans cesse de la certitude qu'elle finirait par atteindre, si le nombre des événemens devenait infini. Pour y parvenir, je considérai que les intégrales définies de différentielles multipliées par des facteurs élevés à de grandes puissances, donnaient par l'intégration, des formules composées d'un grand nombre de termes et de facteurs. Cette remarque me fit naître l'idée de transformer dans de semblables intégrales, les expressions compliquées de l'analyse et les intégrales des équations aux différences. Je remplis cet objet par une méthode qui donne à-la-fois, la

fonction comprise sous le signe intégral, et les limites de l'intégration. Elle offre cela de remarquable, savoir, que cette fonction est la fonction même génératrice des expressions et des équations proposées; ce qui rattache cette méthode, à la théorie des fonctions génératrices, dont elle est le complément. Il ne s'agissait plus ensuite que de réduire l'intégrale définie, en série convergente. C'est ce que j'obtins par un procédé qui fait converger la série, avec d'autant plus de rapidité, que la formule qu'elle représente, est plus compliquée; ensorte qu'il est d'autant plus exact, qu'il devient plus nécessaire. Le plus souvent, la série a pour facteur, la racine carrée du rapport de la circonférence au diamètre : quelquefois elle dépend d'autres transcendantes dont le nombre est infini.

Une remarque importante, qui tient à la grande généralité de l'analyse, et qui permet d'étendre cette méthode, aux formules et aux équations aux différences, que la théorie des probabilités présente le plus fréquemment, est que les séries auxquelles on parvient, en supposant réelles et positives, les limites des intégrales définies, ont également lieu dans le cas où l'équation qui détermine ces limites, n'a que des racines négatives ou imaginaires. Ces passages du positif au négatif, et du réel

à l'imaginaire, dont j'ai fait le premier usage, m'ont conduit encore aux valeurs de plusieurs intégrales définies singulières, que j'ai trouvées ensuite directement. On peut donc considérer ces passages, comme des moyens de découvertes, pareils à l'induction et à l'analogie employées depuis long-temps par les géomètres, d'abord avec un extrême réserve, ensuite avec une entière confiance; un grand nombre d'exemples en ayant justifié l'emploi. Cependant il est toujours utile de confirmer par des démonstrations directes, les résultats obtenus par ces divers moyens.

J'ai nommé *calcul des fonctions génératrices*, l'ensemble des méthodes précédentes: ce calcul sert de fondement à la théorie des probabilités, exposée dans cet ouvrage.

APPLICATIONS DU CALCUL DES PROBABILITÉS.

Des Jeux.

Les combinaisons que les jeux présentent, ont été l'objet des premières recherches sur les probabilités. Dans l'infinie variété de ces combinaisons, plusieurs d'entre elles se prêtent avec facilité au calcul: d'autres exigent des calculs plus difficiles; et les difficultés croissant à mesure que les combinaisons deviennent

plus compliquées, le desir de les surmonter et la curiosité ont excité les géomètres à perfectionner de plus en plus, ce genre d'analyse. On a vu précédemment que l'on pouvait facilement déterminer par la théorie des combinaisons, les bénéfices d'une loterie. Mais il est plus difficile de savoir en combien de tirages on peut parier un contre un, par exemple, que tous les numéros seront sortis. n étant le nombre des numéros, r celui des numéros sortans à chaque tirage, et i le nombre inconnu de tirages; l'expression de la probabilité de la sortie de tous les numéros, dépend de la différence finie $n^{ième}$ de la puissance i du produit de r nombres consécutifs. Lorsque le nombre n est considérable, la recherche de la valeur de i, qui rend cette probabilité égale à $\frac{1}{2}$, devient impossible, à moins qu'on ne convertisse cette différence, dans une série très-convergente. C'est ce que l'on fait heureusement par la méthode ci-dessus indiquée, pour les approximations des fonctions de très-grands nombres. On trouve ainsi que la loterie étant composée de dix mille numéros dont un seul sort à chaque tirage; il y a du désavantage à parier un contre un, que tous les numéros sortiront dans 95767 tirages, et de l'avantage à faire le même pari pour 95768 tirages. A la loterie de France, ce pari est

désavantageux pour 85 tirages, et avantageux pour 86 tirages.

Considérons encore deux joueurs A et B jouant ensemble à *croix* et *pile*, de manière qu'à chaque coup, si *croix* arrive, A donne un jeton à B qui lui en donne un, si *pile* arrive; le nombre des jetons de B est limité: celui des jetons de A est illimité; et la partie ne doit finir que lorsque B n'aura plus de jetons. On demande en combien de coups, on peut parier un contre un, que la partie sera terminée. L'expression de la probabilité que la partie sera terminée dans un nombre i de coups, est donnée par une suite qui renferme un grand nombre de termes et de facteurs, si le nombre des jetons de B est considérable; la recherche de la valeur de l'inconnue i qui rend cette suite égale à $\frac{1}{2}$, serait donc alors impossible, si l'on ne parvenait pas à réduire la suite dans une série très-convergente. En lui appliquant la méthode dont on vient de parler, on trouve une expression fort simple de l'inconnue, de laquelle il résulte que si, par exemple, B a cent jetons; il y a un peu moins d'un contre un à parier que la partie sera finie en 23780 coups, et un peu plus d'un contre un à parier qu'elle sera finie dans 23781 coups.

Ces deux exemples joints à ceux que nous

avons déjà donnés, suffisent pour faire voir comment les problèmes sur les jeux ont pu contribuer à la perfection de l'analyse.

Des inégalités inconnues qui peuvent exister entre les chances que l'on suppose égales.

Les inégalités de ce genre ont sur les résultats du calcul des probabilités, une influence sensible qui mérite une attention particulière. Considérons le jeu de *croix* et *pile*, et supposons qu'il soit également facile d'amener l'une ou l'autre face de la pièce. Alors la probabilité d'amener *croix* au premier coup est $\frac{1}{2}$, et celle de l'amener deux fois de suite, est $\frac{1}{4}$. Mais s'il existe dans la pièce, une inégalité qui fasse paraître une des faces plutôt que l'autre, sans que l'on connaisse quelle est la face favorisée par cette inégalité; la probabilité d'amener *croix* au premier coup sera toujours $\frac{1}{2}$; parce que dans l'ignorance où l'on est de la face que cette inégalité favorise, autant la probabilité de l'événement simple est augmentée, si cette inégalité lui est favorable, autant elle est diminuée, si l'inégalité lui est contraire. Mais dans cette ignorance même, la probabilité d'amener *croix* deux fois de suite, est augmentée. En effet, cette probabilité est celle d'amener *croix* au premier

coup, multipliée par la probabilité que l'ayant amené au premier coup, on l'amènera au second; or son arrivée au premier coup est un motif de croire que l'inégalité de la pièce le favorise; l'inégalité inconnue augmente donc alors la probabilité d'amener *croix* au second coup; elle accroît par conséquent le produit des deux probabilités. Pour soumettre cet objet au calcul, supposons que cette inégalité augmente d'un vingtième, la probabilité de l'événement simple qu'elle favorise. Si cet événement est *croix*, sa probabilité sera $\frac{1}{2}$ plus $\frac{1}{20}$ ou $\frac{11}{20}$, et la probabilité de l'amener deux fois de suite, sera le carré de $\frac{11}{20}$ ou $\frac{121}{400}$. Si l'événement favorisé est *pile*, la probabilité de *croix* sera $\frac{1}{2}$ moins $\frac{1}{20}$ ou $\frac{9}{20}$, et la probabilité de l'amener deux fois de suite sera $\frac{81}{400}$. Comme on n'a d'avance, aucune raison de croire que l'inégalité favorise l'un de ces événemens plutôt que l'autre; il est clair que pour avoir la probabilité de l'événement composé *croix croix*, il faut ajouter les deux probabilités précédentes, et prendre la moitié de leur somme; ce qui donne $\frac{101}{400}$ pour cette probabilité qui surpasse $\frac{1}{4}$ de $\frac{1}{400}$, ou du carré de l'accroissement $\frac{1}{20}$ que l'inégalité ajoute à la possibilité de l'événement qu'elle favorise. La probabilité d'amener *pile pile* est pareillement $\frac{101}{400}$; mais les probabilités d'amener *croix*

pile ou *pile croix* ne sont chacune, que $\frac{99}{400}$; car la somme de ces quatre probabilités, doit égaler la certitude ou l'unité. On trouve ainsi généralement que les causes constantes et inconnues qui favorisent les événemens simples que l'on juge également possibles, accroissent toujours la probabilité de la répétition d'un même événement simple.

Dans un nombre pair de coups, *croix* et *pile* doivent arriver tous deux, ou un nombre pair ou un nombre impair de fois. La probabilité de chacun de ces cas est $\frac{1}{2}$, si les possibilités des deux faces sont égales; mais s'il existe entre elles, une inégalité inconnue, cette inégalité est toujours favorable au premier cas.

Deux joueurs dont on suppose les adresses égales, jouent avec les conditions qu'à chaque coup, celui qui perd, donne un jeton à son adversaire, et que la partie dure, jusqu'à ce que l'un des joueurs n'ait plus de jetons. Le calcul des probabilités nous montre que pour l'égalité du jeu, les mises des joueurs doivent être en raison inverse de leurs jetons. Mais s'il existe entre leurs adresses, une petite inégalité inconnue; elle favorise celui des joueurs qui a le plus petit nombre de jetons. Sa probabilité de gagner la partie augmente, si les joueurs conviennent de doubler, de tripler

leurs jetons; et elle devient $\frac{1}{2}$ ou la même que la probabilité de l'autre joueur, dans le cas où les nombres de leurs jetons deviendraient infinis, en conservant toujours le même rapport.

On peut corriger l'influence de ces inégalités inconnues, en les soumettant elles-mêmes aux chances du hasard. Ainsi au jeu de *croix* et *pile*, si l'on a une seconde pièce que l'on projette chaque fois avec la première; et que l'on convienne de nommer constamment *croix*, la face amenée par cette seconde pièce; la probabilité d'amener *croix* deux fois de suite, avec la première pièce, approchera beaucoup plus d'un quart, que dans le cas d'une seule pièce. Dans ce dernier cas, la différence est le carré du petit accroissement de possibilité que l'inégalité inconnue donne à la face de la première pièce, qu'elle favorise : dans l'autre cas, cette différence est le quadruple produit de ce carré, par le carré correspondant relatif à la seconde pièce.

Que l'on jette dans une urne, cent numéros depuis un jusqu'à cent, dans l'ordre de la numération, et qu'après avoir agité l'urne, pour mêler ces numéros, on en tire un; il est clair que si le mélange a été bien fait, les probabilités de sortie des numéros, sont les mêmes. Mais si l'on craint qu'il n'y ait entre elles, de

petites différences dépendantes de l'ordre suivant lequel les numéros ont été jetés dans l'urne ; on diminuera considérablement ces différences, en jetant dans une seconde urne, ces numéros suivant leur ordre de sortie de la première urne, et en agitant ensuite cette seconde urne, pour mêler ces numéros. Une troisième urne, une quatrième, etc., diminueraient de plus en plus ces différences déjà insensibles dans la seconde urne.

De la probabilité des témoignages.

La plupart de nos jugemens étant fondés sur la probabilité des témoignages, il est bien important de la soumettre au calcul. La chose, il est vrai, devient souvent impossible, par la difficulté d'apprécier la véracité des témoins, et par le grand nombre de circonstances dont les faits qu'ils attestent, sont accompagnés. Mais on peut dans plusieurs cas, résoudre des problèmes qui ont beaucoup d'analogie avec les questions que l'on se propose, et dont les solutions peuvent être regardées comme des approximations propres à nous guider, et à nous garantir des erreurs et des dangers auxquels de mauvais raisonnemens nous exposent. Une approximation de ce genre, lorsqu'elle est bien dirigée, est toujours préférable

aux raisonnemens les plus spécieux. Essayons donc de donner quelques règles générales pour y parvenir.

On a extrait un seul numéro, d'une urne qui en renferme mille. Un témoin de ce tirage, annonce que le n° 79 est sorti; on demande la probabilité de cette sortie. Supposons que l'expérience ait fait connaître que ce témoin trompe une fois sur dix, ensorte que la probabilité de son témoignage soit $\frac{9}{10}$. Ici, l'événement observé est le témoin attestant que le n° 79 est sorti. Cet événement peut résulter des deux hypothèses suivantes, savoir, que le témoin énonce la vérité, ou qu'il trompe. Suivant le principe que nous avons exposé sur la probabilité des causes, tirée des événemens observés, il faut d'abord déterminer *à priori*, la probabilité de l'événement dans chaque hypothèse. Dans la première, la probabilité que le témoin annoncera le n° 79, est la probabilité même de la sortie de ce numéro, c'est-à-dire $\frac{1}{1000}$. Il faut la multiplier par la probabilité $\frac{9}{10}$ de la véracité du témoin; on aura donc $\frac{9}{10000}$ pour la probabilité de l'événement observé, dans cette hypothèse. Si le témoin trompe, le n° 79 n'est pas sorti; et la probabilité de ce cas est $\frac{999}{1000}$. Mais pour annoncer la sortie de ce numéro, le témoin doit le choisir parmi les 999 numéros non sortis; et comme il est

supposé n'avoir aucun motif de préférence pour les uns plutôt que pour les autres, la probabilité qu'il choisira le n° 79 est $\frac{1}{999}$; en multipliant donc cette probabilité, par la précédente, on aura $\frac{1}{1000}$ pour la probabilité que le témoin annoncera le n° 79, dans la seconde hypothèse. Il faut encore multiplier cette probabilité, par la probabilité $\frac{1}{10}$ de l'hypothèse elle-même; ce qui donne $\frac{1}{10000}$ pour la probabilité de l'événement, relative à cette hypothèse. Présentement, si l'on forme une fraction dont le numérateur soit la probabilité relative à la première hypothèse, et dont le dénominateur soit la somme des probabilités relatives aux deux hypothèses; on aura par le sixième principe, la probabilité de la première hypothèse, et cette probabilité sera $\frac{9}{10}$, c'est-à-dire la véracité même du témoin. C'est aussi la probabilité de la sortie du n° 79. La probabilité du mensonge du témoin et de la non-sortie de ce numéro est $\frac{1}{10}$.

Si le témoin voulant tromper, avait quelqu'intérêt à choisir le n° 79 parmi les numéros non-sortis; s'il jugeait, par exemple, qu'ayant placé sur ce numéro une mise considérable, l'annonce de sa sortie augmentera son crédit; la probabilité qu'il choisira ce numéro, ne sera plus, comme auparavant, $\frac{1}{999}$; elle pourra être alors $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, etc., suivant l'intérêt qu'il aura

d'annoncer sa sortie. En la supposant $\frac{1}{9}$, il faudra multiplier par cette fraction, la probabilité $\frac{999}{1000}$, pour avoir dans l'hypothèse du mensonge, la probabilité de l'événement observé, qu'il faut encore multiplier par $\frac{1}{10}$; ce qui donne $\frac{111}{10000}$ pour la probabilité de l'événement dans la seconde hypothèse. Alors la probabilité de la première hypothèse, ou de la sortie du n° 79, se réduit par la règle précédente, à $\frac{9}{120}$. Elle est donc très-affaiblie par la considération de l'intérêt que le témoin peut avoir à annoncer la sortie du n° 79. Le bon sens nous dicte que cet intérêt doit inspirer de la défiance. Mais le calcul en apprécie l'influence avec exactitude.

La probabilité *à priori* du numéro énoncé par le témoin, est l'unité divisée par le nombre des numéros de l'urne : elle se transforme en vertu du témoignage, dans la véracité même du témoin; elle peut donc être affaiblie par ce témoignage. Si, par exemple, l'urne ne renferme que deux numéros, ce qui donne $\frac{1}{2}$ pour la probabilité *à priori* de la sortie du n° 1; et si la véracité d'un témoin qui l'annonce est $\frac{4}{10}$; cette sortie en devient moins probable. En effet, il est visible que le témoin ayant alors plus de pente vers le mensonge que vers la vérité; son témoignage doit diminuer la probabilité du fait attesté, toutes les fois que

cette probabilité égale ou surpasse $\frac{1}{2}$. Mais s'il y a trois numéros dans l'urne, la probabilité *à priori* de la sortie du n° 1, est accrue par l'affirmation d'un témoin dont la véracité surpasse $\frac{1}{3}$.

Supposons maintenant que l'urne renferme 999 boules noires et une boule blanche, et qu'une boule en ayant été extraite, un témoin du tirage annonce que cette boule est blanche. La probabilité de l'événement observé, déterminée *à priori*, dans la première hypothèse, sera ici, comme dans la question précédente, égale à $\frac{9}{10000}$. Mais dans l'hypothèse où le témoin trompe, la boule blanche n'est pas sortie, et la probabilité de ce cas est $\frac{999}{1000}$. Il faut la multiplier par la probabilité $\frac{1}{10}$ du mensonge, ce qui donne $\frac{999}{10000}$ pour la probabilité de l'événement observé, relative à la seconde hypothèse. Cette probabilité n'était que $\frac{1}{10000}$ dans la question précédente : cette grande différence tient à ce qu'une boule noire étant sortie, le témoin voulant tromper, n'a point de choix à faire parmi les 999 boules non sorties, pour annoncer la sortie d'une boule blanche. Maintenant, si l'on forme deux fractions dont les numérateurs soient les probabilités relatives à chaque hypothèse, et dont le dénominateur commun soit la somme de ces probabilités ; on aura $\frac{9}{1008}$ pour la probabilité

de la première hypothèse, et de la sortie d'une boule blanche, et $\frac{999}{1008}$ pour la probabilité de la seconde hypothèse, et de la sortie d'une boule noire. Cette dernière probabilité est fort approchante de la certitude : elle en approcherait beaucoup plus encore, et deviendrait $\frac{999999}{1000008}$, si l'urne renfermait un million de boules dont une seule serait blanche ; la sortie d'une boule blanche devenant alors beaucoup plus extraordinaire. On voit ainsi comment la probabilité du mensonge croît à mesure que le fait devient plus extraordinaire.

Nous avons supposé jusqu'ici que le témoin ne se trompait point ; mais si l'on admet encore la chance de son erreur, le fait extraordinaire devient plus invraisemblable. Alors au lieu de deux hypothèses, on aura les quatre suivantes, savoir, celle du témoin ne trompant point et ne se trompant point ; celle du témoin ne trompant point, et se trompant ; l'hypothèse du témoin trompant et ne se trompant point ; enfin celle du témoin trompant et se trompant. En déterminant *à priori* dans chacune de ces hypothèses, la probabilité de l'événement observé ; on trouve par le sixième principe, la probabilité que le fait attesté est faux, égale à une fraction dont le numérateur est le nombre des boules noires de l'urne, multiplié par la somme des probabilités que

le témoin ne trompe point et se trompe, ou qu'il trompe et ne se trompe point, et dont le dénominateur est ce numérateur augmenté de la somme des probabilités que le témoin ne trompe point et ne se trompe point, ou qu'il trompe et se trompe à-la-fois. On voit par là, que si le nombre des boules noires de l'urne est très-grand, ce qui rend extraordinaire, la sortie de la boule blanche; la probabilité que le fait attesté n'est pas, approche extrêmement de la certitude.

En étendant cette conséquence, à tous les faits extraordinaires; il en résulte que la probabilité de l'erreur ou du mensonge du témoin, devient d'autant plus grande, que le fait attesté est plus extraordinaire. Quelques auteurs ont avancé le contraire, en se fondant sur ce que la vue d'un fait extraordinaire étant parfaitement semblable à celle d'un fait ordinaire, les mêmes motifs doivent nous porter à croire également le témoin, soit qu'il affirme l'un ou qu'il affirme l'autre de ces faits. Le simple bon sens repousse une aussi étrange assertion: mais le calcul des probabilités, en confirmant l'indication du sens commun, apprécie de plus, l'invraisemblance des témoignages sur les faits extraordinaires.

On insiste, et l'on suppose deux témoins également dignes de foi, dont le premier

atteste qu'il a vu mort, il y a quinze jours, un individu que le second témoin affirme avoir vu hier, plein de vie. L'un ou l'autre de ces faits n'offre rien d'invraisemblable. La résurrection de l'individu est une conséquence de leur ensemble; mais les témoignages ne portant point directement sur elle, ce qu'elle a d'extraordinaire ne doit point affaiblir la croyance qui leur est due. (*Encyclopédie, art. certitude*).

Cependant, si la conséquence qui résulte de l'ensemble des témoignages était impossible, l'un d'eux serait nécessairement faux; or une conséquence impossible est la limite des conséquences extraordinaires, comme l'erreur est la limite des invraisemblances; la valeur des témoignages, qui devient nulle dans le cas d'une conséquence impossible, doit donc être très-affaiblie dans celui d'une conséquence extraordinaire. C'est en effet, ce que le calcul des probabilités confirme.

Pour le faire voir, considérons deux urnes A et B dont la première contient un million de boules blanches, et la seconde, un million de boules noires. On tire de l'une de ces urnes, une boule que l'on remet dans l'autre urne dont on extrait ensuite une boule. Deux témoins, l'un du premier tirage, et l'autre du second, attestent que la boule qu'ils ont vu

extraire, est blanche. Chaque témoignage pris isolément, n'a rien d'invraisemblable; et il est facile de voir que la probabilité du fait attesté, est la véracité même du témoin. Mais il suit de l'ensemble des témoignages, qu'une boule blanche a été extraite de l'urne A au premier tirage, et qu'ensuite, mise dans l'urne B, elle a reparu au second tirage; ce qui est fort extraordinaire ; car cette urne renfermant alors une boule blanche sur un million de boules noires, la probabilité d'en extraire la boule blanche est $\frac{1}{1000001}$. Pour déterminer l'affaiblissement qui en résulte dans la probabilité de la chose énoncée par les deux témoins; nous remarquerons que l'événement observé est ici l'affirmation par chacun d'eux, que la boule qu'il a vu extraire, est blanche. Représentons par $\frac{9}{10}$ la probabilité qu'il énonce la vérité, ce qui peut avoir lieu dans le cas présent, lorsque le témoin ne trompe point et ne se trompe point, et lorsqu'il trompe et se trompe à-la-fois. On peut former les quatre hypothèses suivantes.

1°. Le premier et le second témoin disent la vérité. Alors, une boule blanche a d'abord été extraite de l'urne A, et la probabilité de cet événement est $\frac{1}{2}$, puisque la boule extraite au premier tirage a pu sortir également de l'une ou l'autre urne. Ensuite, la boule

extraite mise dans l'urne B a reparu au second tirage : la probabilité de cet événement est $\frac{1}{1000001}$; la probabilité du fait énoncé est donc $\frac{1}{2000002}$. En la multipliant par le produit des probabilités $\frac{9}{10}$ et $\frac{9}{10}$ que les témoins disent la vérité; on aura $\frac{81}{200000200}$ pour la probabilité de l'événement observé, dans cette première hypothèse.

2°. Le premier témoin dit la vérité, et le second ne la dit point, soit qu'il trompe et ne se trompe point, soit qu'il ne trompe point et se trompe. Alors une boule blanche est sortie de l'urne A au premier tirage, et la probabilité de cet événement est $\frac{1}{2}$. Ensuite cette boule ayant été mise dans l'urne B, une boule noire en a été extraite : la probabilité de cette extraction est $\frac{1000000}{1000001}$; on a donc $\frac{1000000}{2000002}$ pour la probabilité de l'événement composé. En la multipliant par le produit des deux probabilités $\frac{9}{10}$ et $\frac{1}{10}$ que le premier témoin dit la vérité, et que le second ne la dit point; on aura $\frac{9000000}{200000200}$ pour la probabilité de l'événement observé, dans la seconde hypothèse.

3°. Le premier témoin ne dit pas la vérité, et le second l'énonce. Alors une boule noire est sortie de l'urne B au premier tirage, et après avoir été mise dans l'urne A, une boule blanche a été extraite de cette urne. La probabilité du premier de ces événemens est $\frac{1}{2}$,

et celle du second est $\frac{1000000}{1000001}$; la probabilité de l'événement composé est donc $\frac{1000000}{2000002}$. En la multipliant par le produit des probabilités $\frac{1}{10}$ et $\frac{9}{10}$, que le premier témoin ne dit pas la vérité, et que le second l'énonce; on aura $\frac{9000000}{200000200}$ pour la probabilité de l'événement observé, relative à cette hypothèse.

4°. Enfin, aucun des témoins ne dit la vérité. Alors une boule noire a été extraite de l'urne B au premier tirage; ensuite ayant été mise dans l'urne A, elle a reparu au second tirage : la probabilité de cet événement composé est $\frac{1}{2000002}$. En la multipliant par le produit des probabilités $\frac{1}{10}$ et $\frac{1}{10}$ que chaque témoin ne dit pas la vérité; on aura $\frac{1}{200000200}$ pour la probabilité de l'événement observé, dans cette hypothèse.

Maintenant, pour avoir la probabilité de la chose énoncée par les deux témoins, savoir, qu'une boule blanche a été extraite à chacun des tirages; il faut diviser la probabilité correspondante à la première hypothèse, par la somme des probabilités relatives aux quatre hypothèses; et alors on a pour cette probabilité $\frac{81}{18000082}$, fraction extrêmement petite.

Si les deux témoins affirmaient, le premier, qu'une boule blanche a été extraite de l'une des deux urnes A et B; le second, qu'une boule blanche a été pareillement extraite de

l'une des deux urnes A′ et B′, en tout semblables aux premières; la probabilité de la chose énoncée par les deux témoins serait le produit des probabilités de leurs témoignages ou $\frac{81}{100}$, c'est à-dire, cent quatre-vingt mille fois au moins, plus grande que la précédente. On voit par là, combien dans le premier cas, la réapparition au second tirage, de la boule blanche extraite au premier, conséquence extraordinaire des deux témoignages, en affaiblit la valeur.

Nous n'ajouterions point foi au témoignage d'un homme qui nous attesterait qu'en projetant cent dés en l'air, ils sont tous retombés sur la même face. Si nous avions été nous-mêmes spectateurs de cet événement, nous n'en croirions nos propres yeux, qu'après en avoir scrupuleusement examiné toutes les circonstances, pour être bien sûrs qu'il n'y a point eu de prestige. Mais après cet examen, nous ne balancerions point à l'admettre, malgré son extrême invraisemblance; et personne ne serait tenté pour l'expliquer, de recourir à une illusion produite par un renversement des lois de la vision. Nous devons en conclure que la probabilité de la constance des lois de la nature, est pour nous, supérieure à celle que l'événement dont il s'agit, ne doit point avoir lieu; probabilité supérieure elle-

même à celle de la plupart des faits historiques que nous regardons comme incontestables. On peut juger par là, du poids immense de témoignages nécessaires pour admettre une suspension des lois naturelles; et combien il serait abusif d'appliquer à ce cas, les règles ordinaires de la critique. Tous ceux qui sans offrir cette immensité de témoignages, étayent ce qu'ils avancent, de récits d'événemens contraires à ces lois, affaiblissent plutôt qu'ils n'augmentent la croyance qu'ils cherchent à inspirer; car alors ces récits rendent très-probable, l'erreur ou le mensonge de leurs auteurs. Mais ce qui diminue la croyance des hommes éclairés, accroît souvent celle du vulgaire; et nous en avons donné précédemment la raison.

Il y a des choses tellement extraordinaires, que rien ne peut en balancer l'invraisemblance. Mais celle-ci, par l'effet d'une opinion dominante, peut être affaiblie au point de paraître inférieure à la probabilité des témoignages; et quand cette opinion vient à changer, un récit absurde admis unanimement dans le siècle qui lui a donné naissance, n'offre aux siècles suivans, qu'une nouvelle preuve de l'extrême influence de l'opinion générale, sur les meilleurs esprits. Deux grands hommes du siècle de Louis XIV, Racine et Pascal, en

sont des exemples frappans. Il est affligeant de voir avec quelle complaisance, Racine, ce peintre admirable du cœur humain, et le poëte le plus parfait qui fut jamais, rapporte comme miraculeuse, la guérison de la jeune Perrier, nièce de Pascal, et pensionnaire à l'abbaye de Port-Royal : il est pénible de lire les raisonnemens par lesquels Pascal cherche à prouver que ce miracle devenait nécessaire à la religion, pour justifier la doctrine des religieuses de cette abbaye, alors persécutées par les Jésuites. La jeune Perrier était depuis trois ans et demi, affligée d'une fistule lacrymale : elle toucha de son œil malade, une relique que l'on prétendait être une des épines de la couronne du Sauveur, et elle se crut à l'instant, guérie. Quelques jours après, les médecins et les chirurgiens constatèrent la guérison, et ils jugèrent que la nature et les remèdes n'y avaient eu aucune part. Cet événement arrivé en 1656, ayant fait un grand bruit, « tout Paris se porta, dit Racine, à » Port-Royal. La foule croissait de jour en » jour, et Dieu même semblait prendre plaisir » à autoriser la dévotion des peuples, par la » quantité de miracles qui se firent en cette » église. » A cette époque, les miracles et les sortiléges ne paraissaient pas encore invraisemblables, et l'on n'hésitait point à leur

attribuer les singularités de la nature, que l'on ne pouvait autrement expliquer.

Cette manière d'envisager les effets extraordinaires se retrouve dans les ouvrages les plus remarquables du siècle de Louis XIV, dans l'Essai même sur l'entendement humain, du sage Locke qui dit en parlant des degrés d'assentiment : « quoique la commune expé-
» rience et le cours ordinaire des choses aient
» avec raison, une grande influence sur l'es-
» prit des hommes, pour les porter à donner
» ou à refuser leur consentement à une chose
» qui leur est proposée à croire; il y a pour-
» tant un cas où ce qu'il y a d'étrange dans
» un fait, n'affaiblit point l'assentiment que
» nous devons donner au témoignage sincère
» sur lequel il est fondé. Lorsque des événe-
» mens surnaturels sont conformes aux fins
» que se propose celui qui a le pouvoir de
» changer le cours de la nature, ils peuvent
» être d'autant plus propres à trouver créance
» dans nos esprits, qu'ils sont plus au-dessus
» des observations ordinaires, ou même qu'ils
» y sont plus opposés. » Les vrais principes de la probabilité des témoignages, ayant été ainsi méconnus des philosophes auxquels la raison est principalement redevable de ses progrès; j'ai cru devoir exposer avec étendue, les résultats du calcul sur cet important objet.

Ici se présente naturellement la discussion d'un argument fameux de Pascal, que Craig, mathématicien anglais, a reproduit sous une forme géométrique. Des témoins attestent qu'ils tiennent de la Divinité même, qu'en se conformant à telle chose, on jouira, non pas d'une, ou de deux, mais d'une infinité de vies heureuses. Quelque faible que soit la probabilité des témoignages, pourvu qu'elle ne soit pas infiniment petite, il est clair que l'avantage de ceux qui se conforment à la chose prescrite, est infini; puisqu'il est le produit de cette probabilité, par un bien infini; on ne doit donc point balancer à se procurer cet avantage.

Cet argument est fondé sur le nombre infini de vies heureuses promises au nom de la Divinité, par les témoins; il faudrait donc faire ce qu'ils prescrivent, précisément parce qu'ils exagèrent leurs promesses au-delà de toutes limites, conséquence qui répugne au bon sens. Aussi le calcul nous fait-il voir que cette exagération même affaiblit la probabilité de leur témoignage, au point de la rendre infiniment petite, ou nulle. En effet, ce cas revient à celui d'un témoin qui annoncerait la sortie du numéro le plus élevé, d'une urne remplie d'un grand nombre de numéros dont un seul a été extrait, et qui aurait un grand intérêt

à annoncer la sortie de ce numéro. On a vu précédemment combien cet intérêt affaiblit son témoignage. En n'évaluant qu'à $\frac{1}{2}$ la probabilité que si le témoin trompe, il choisira le plus grand numéro ; le calcul donne la probabilité de son annonce, égale à une fraction dont le numérateur est le double de la probabilité de son témoignage, considérée *à priori* ou indépendamment de l'annonce, et dont le dénominateur est le produit du nombre des numéros de l'urne, par l'unité diminuée de cette dernière probabilité. Pour assimiler ce cas, à celui de l'argument de Pascal ; il suffit de représenter par les numéros de l'urne, tous les nombres possibles de vies heureuses, ce qui rend le nombre de ces numéros, infini ; et d'observer que si les témoins trompent, ils ont le plus grand intérêt pour accréditer leur mensonge, à promettre une éternité de bonheur. L'expression précédente de la probabilité de leur témoignage, devient alors infiniment petite. En la multipliant par le nombre infini de vies heureuses promises, l'infini disparaît du produit qui exprime l'avantage résultant de cette promesse ; ce qui détruit l'argument de Pascal.

Considérons présentement la probabilité de l'ensemble de plusieurs témoignages sur un fait déterminé. Pour fixer les idées, supposons

que ce fait soit la sortie d'un numéro d'une urne qui en renferme cent, et dont on a extrait un seul numéro. Deux témoins de ce tirage, annoncent que le n° 1 est sorti; et l'on demande la probabilité résultante de l'ensemble de ces témoignages. On peut former ces deux hypothèses : les témoins disent la vérité; les témoins trompent. Dans la première hypothèse, le n° 1 est sorti, et la probabilité de cet événement est $\frac{1}{100}$. Il faut la multiplier par le produit des véracités des témoins, véracités que nous supposerons être $\frac{9}{10}$ et $\frac{7}{10}$; on aura donc $\frac{63}{10000}$ pour la probabilité de l'événement observé, dans cette hypothèse. Dans la seconde, le n° 1 n'est pas sorti, et la probabilité de cet événement est $\frac{99}{100}$. Mais l'accord des témoins exige alors qu'en cherchant à tromper, ils choisissent tous deux le numéro 1, sur les 99 numéros non sortis; la probabilité de ce choix est le produit de la fraction $\frac{1}{99}$ par elle-même; il faut ensuite multiplier ces deux probabilités ensemble, et par le produit des probabilités $\frac{1}{10}$ et $\frac{3}{10}$ que les témoins trompent; on aura ainsi $\frac{1}{330000}$ pour la probabilité de l'événement observé, dans la seconde hypothèse. Maintenant on aura la probabilité du fait attesté ou de la sortie du n° 1, en divisant la probabilité relative à la première hypothèse, par la somme des probabilités

relatives aux deux hypothèses; cette probabilité sera donc $\frac{2079}{2080}$; et la probabilité de la non sortie de ce numéro et du mensonge des témoins sera $\frac{1}{2080}$.

Si l'urne ne renfermait que les numéros 1 et 2; on trouverait de la même manière, $\frac{21}{22}$ pour la probabilité de la sortie du n° 1, et par conséquent $\frac{1}{22}$ pour la probabilité du mensonge des témoins, probabilité quatre-vingt-quatorze fois au moins, plus grande que la précédente. On voit par là, combien la probabilité du mensonge des témoins diminue quand le fait qu'ils attestent est moins probable en lui-même. En effet, on conçoit qu'alors l'accord des témoins, lorsqu'ils trompent, devient plus difficile, à moins qu'ils ne s'entendent, ce que nous supposons ici ne pas avoir lieu.

Dans le cas précédent où l'urne ne renfermant que deux numéros, la probabilité *à priori* du fait attesté est $\frac{1}{2}$; la probabilité résultante des témoignages, est le produit des véracités des témoins, divisé par ce produit ajouté à celui des probabilités respectives de leur mensonge.

Il nous reste à considérer l'influence du temps, sur la probabilité des faits transmis par une chaîne traditionnelle de témoins. Il est clair que cette probabilité doit diminuer à

mesure que la chaîne se prolonge. Si le fait n'a aucune probabilité par lui-même ; celle qu'il acquiert par les témoignages, décroît suivant le produit continu de la véracité des témoins. Si le fait a par lui-même, une probabilité ; si, par exemple, ce fait est la sortie du n° 1 d'une urne qui en renferme un nombre fini, et dont il est certain qu'on a extrait un seul numéro ; ce que la chaîne traditionnelle ajoute à cette probabilité, décroît suivant un produit continu, dont le premier facteur est le rapport du nombre des numéros de l'urne moins un, à ce même nombre ; et dont chaque autre facteur est la véracité de chaque témoin, diminuée du rapport de la probabilité de son mensonge, au nombre des numéros de l'urne moins un ; ensorte que la limite de la probabilité du fait, est celle de ce fait considéré *à priori* ou indépendamment des témoignages, probabilité égale à l'unité divisée par le nombre des numéros de l'urne.

L'action du temps affaiblit donc sans cesse, la probabilité des faits historiques, comme elle altère les monumens les plus durables. On peut, à la vérité, la ralentir, en multipliant et conservant les témoignages et les monumens qui les étayent. L'imprimerie offre pour cet objet, un grand moyen malheureusement inconnu des anciens. Malgré les avantages

infinis qu'elle présente; les révolutions physiques et morales dont la surface de ce globe sera toujours agitée, finiront, en se joignant à l'effet inévitable du temps, par rendre douteux après des milliers d'années, les faits historiques aujourd'hui les plus certains.

Craig a essayé de soumettre au calcul, l'affaiblissement graduel des preuves de la religion chrétienne : en supposant que le monde doit finir à l'époque où elle cessera d'être probable, il trouve que cela doit arriver, 1454 ans après le moment où il écrit. Mais son analyse est aussi fautive, que son hypothèse sur la durée du monde est bizarre.

Les jugemens des tribunaux peuvent être assimilés aux témoignages, en considérant chaque juge, comme un témoin qui atteste la vérité de son opinion. Supposons le tribunal composé de trois juges. Si le jugement qu'ils prononcent, est rendu à l'unanimité, et si chacun d'eux mérite la même confiance; la probabilité de ce jugement sera la troisième puissance de la véridicité des juges, divisée par cette puissance ajoutée à la troisième puissance de leur faillibilité. Si le jugement n'est rendu qu'à la pluralité; sa probabilité sera cette véridicité elle-même, que l'on peut déterminer par l'expérience, en observant sur un très-grand nombre de jugemens, combien

ont été rendus à l'unanimité. Si, par exemple, le rapport du second au premier de ces nombres, est celui de 7 à 16; on trouve par une analyse dont nous exposerons ci-après les principes, que la véridicité de chaque juge est $\frac{3}{4}$, et que la probabilité d'un nouveau jugement rendu à l'unanimité est $\frac{27}{28}$.

L'analyse confirme encore, ce que dicte le simple bon sens, savoir, que la bonté des jugemens est d'autant plus probable, que les juges sont plus nombreux et plus éclairés; il importe donc que les tribunaux d'appel remplissent ces deux conditions. Les tribunaux de première instance, plus rapprochés des justiciables, leur offrent l'avantage d'un premier jugement déjà probable, et dont souvent ils se contentent, soit en transigeant, soit en se désistant de leurs prétentions. Mais si l'importance et l'incertitude de l'objet en litige, déterminent un plaideur à recourir au tribunal d'appel; il doit trouver dans une plus grande probabilité d'obtenir un jugement équitable, plus de sûreté pour sa fortune, et la compensation des embarras et des frais qu'une nouvelle procédure entraîne. C'est ce qui n'avait point lieu dans l'institution de l'appel réciproque des tribunaux de département, institution par là très-préjudiciable aux intérêts des citoyens.

Des choix et des décisions des assemblées.

La probabilité des décisions d'une assemblée dépend de la pluralité des voix, des lumières et de l'impartialité des membres qui la composent. Tant de passions et d'intérêts particuliers y mêlent si souvent leur influence, qu'il est impossible de soumettre au calcul, cette probabilité. Il y a cependant quelques résultats généraux dictés par le simple bon sens, et que le calcul confirme. Si, par exemple, l'assemblée est très-peu éclairée sur l'objet soumis à sa décision; si cet objet exige des considérations délicates, ou si la vérité sur ce point est contraire à des préjugés reçus, ensorte qu'il y ait plus d'un contre un à parier que chaque votant s'en écartera; alors la décision de la majorité sera probablement mauvaise, et la crainte à cet égard sera d'autant plus juste, que l'assemblée sera plus nombreuse. Il importe donc à la chose publique, que les assemblées n'aient à prononcer que sur les objets à la portée du plus grand nombre: il lui importe que l'instruction soit généralement répandue, et que de bons ouvrages fondés sur la raison et l'expérience, éclairent ceux qui sont appelés à décider du sort de leurs semblables ou à les gouverner, et les

prémunissent d'avance contre les faux aperçus et les préventions de l'ignorance. Les savans ont de fréquentes occasions de remarquer que les premiers aperçus trompent souvent, et que le vrai n'est pas toujours vraisemblable.

Il est difficile de connaître et même de définir le vœu d'une assemblée, au milieu de la variété des opinions de ses membres. Essayons de donner sur cela, quelques règles, en considérant les deux cas les plus ordinaires, l'élection entre plusieurs candidats, et celle entre plusieurs propositions relatives au même objet.

Lorsqu'une assemblée doit choisir entre plusieurs candidats qui se présentent pour une ou plusieurs places du même genre; ce qui paraît le plus simple est de faire écrire à chaque votant sur un billet, les noms de tous les candidats, suivant l'ordre du mérite qu'il leur attribue. En supposant qu'il les classe de bonne foi, l'inspection de ces billets fera connaître les résultats des élections, de quelque manière que les candidats soient comparés entre eux; ensorte que de nouvelles élections ne peuvent apprendre rien de plus à cet égard. Il s'agit présentement d'en conclure l'ordre de préférence, que les billets établissent entre les candidats. Imaginons que l'on donne à chaque électeur, une urne qui contienne une

infinité de boules au moyen desquelles il puisse nuancer tous les degrés de mérite des candidats : concevons encore qu'il tire de son urne, un nombre de boules proportionnel au mérite de chaque candidat, et supposons ce nombre écrit sur un billet, à côté du nom du candidat. Il est clair qu'en faisant une somme de tous les nombres relatifs à chaque candidat, sur chaque billet, celui de tous les candidats qui aura la plus grande somme, sera le candidat que l'assemblée préfère; et qu'en général, l'ordre de préférence des candidats, sera celui des sommes relatives à chacun d'eux. Mais les billets ne marquent point le nombre des boules que chaque électeur donne aux candidats : ils indiquent seulement que le premier en a plus que le second, le second plus que le troisième, et ainsi de suite. En supposant donc au premier, sur un billet donné, un nombre quelconque de boules; toutes les combinaisons des nombres inférieurs, qui remplissent les conditions précédentes, sont également admissibles; et l'on aura le nombre de boules, relatif à chaque candidat, en faisant une somme de tous les nombres que chaque combinaison lui donne, et en la divisant par le nombre entier des combinaisons. Si ces nombres sont très-considérables, comme on doit le supposer pour

qu'ils puissent exprimer toutes les nuances du mérite ; une analyse fort simple fait voir que les nombres qu'il faut écrire sur chaque billet à côté du dernier nom, de l'avant-dernier, etc., peuvent être représentés par la progression arithmétique 1, 2, 3, etc. En écrivant donc ainsi sur chaque billet, les termes de cette progression, et ajoutant les termes relatifs à chaque candidat sur ces billets ; les diverses sommes indiqueront par leur grandeur, l'ordre de préférence qui doit être établi entre les candidats. Tel est le mode d'élection, qu'indique la Théorie des Probabilités. Sans doute, il serait le meilleur ; si chaque électeur inscrivait sur son billet, les noms des candidats, dans l'ordre du mérite qu'il leur attribue. Mais les intérêts particuliers et beaucoup de considérations étrangères au mérite, doivent troubler cet ordre, et faire placer quelquefois au dernier rang, le candidat le plus redoutable à celui que l'on préfère ; ce qui donne trop d'avantage aux candidats d'un médiocre mérite. Aussi l'expérience a-t-elle fait abandonner ce mode d'élection, dans les établissemens qui l'avaient adopté.

L'élection à la majorité absolue des suffrages réunit à la certitude de n'admettre aucun des candidats que cette majorité rejetterait, l'avantage d'exprimer le plus souvent, le vœu de

l'assemblée. Elle coïncide toujours avec le mode précédent, lorsqu'il n'y a que deux candidats. A la vérité, elle expose à l'inconvénient de rendre les élections interminables. Mais l'expérience a fait voir que cet inconvénient est nul, et que le desir général de mettre fin aux élections, réunit bientôt la majorité des suffrages sur un des candidats.

Le choix entre plusieurs propositions relatives au même objet, semble devoir être assujéti aux mêmes règles, que l'élection entre plusieurs candidats. Mais il existe entre ces deux cas, cette différence, savoir, que le mérite d'un candidat n'exclut point celui de ses concurrens; au lieu que si les propositions entre lesquelles il faut choisir, sont contraires, la vérité de l'une exclut la vérité des autres. Voici comme on doit alors envisager la question.

Donnons à chaque votant, une urne qui renferme un nombre infini de boules; et supposons qu'il les distribue sur les diverses propositions, en raison des probabilités respectives qu'il leur attribue. Il est clair que le nombre total des boules, exprimant la certitude, et le votant étant par l'hypothèse, assuré que l'une des propositions doit être vraie; il répartira ce nombre en entier, sur les propositions. Le problème se réduit donc

à déterminer les combinaisons dans lesquelles les boules seront réparties, de manière qu'il y en ait plus sur la première proposition du billet, que sur la seconde; plus sur la seconde que sur la troisième, etc.; à faire les sommes de tous les nombres de boules, relatifs à chaque proposition dans ces diverses combinaisons; et à diviser cette somme, par le nombre des combinaisons : les quotiens seront les nombres de boules, que l'on doit attribuer aux propositions sur un billet quelconque. On trouve par l'analyse, qu'en partant de la dernière proposition, pour remonter à la première; ces quotiens sont entre eux, comme les quantités suivantes : 1° l'unité divisée par le nombre des propositions; 2° la quantité précédente augmentée de l'unité divisée par le nombre des propositions moins une; 3° cette seconde quantité augmentée de l'unité divisée par le nombre des propositions moins deux; et ainsi du reste. On écrira donc sur chaque billet, ces quantités à côté des propositions correspondantes; et en ajoutant les quantités relatives à chaque proposition, sur les divers billets; les sommes indiqueront par leur grandeur, l'ordre de préférence que l'assemblée donne à ces propositions.

Des Lois de la Probabilité, qui résultent de la multiplication indéfinie des événemens.

Au milieu des causes variables et inconnues que nous comprenons sous le nom de *hasard*, et qui rendent incertaine et irrégulière, la marche des événemens; on voit naître à mesure qu'ils se multiplient, une régularité frappante qui semble tenir à un dessein, et que l'on a considérée comme une preuve de la providence qui gouverne le monde. Mais en y réfléchissant, on reconnaît bientôt que cette régularité n'est que le développement des possibilités respectives des événemens simples, qui doivent se présenter plus souvent, lorsqu'ils sont plus probables. Concevons, par exemple, une urne qui renferme des boules blanches et des boules noires; et supposons qu'à chaque fois que l'on en tire une boule, on la remette dans l'urne pour procéder à un nouveau tirage. Le rapport du nombre des boules blanches extraites, au nombre des boules noires extraites, sera le plus souvent très-irrégulier dans les premiers tirages; mais les causes variables de cette irrégularité, produisent des effets alternativement favorables et contraires à la marche

régulière des événemens, et qui se détruisant mutuellement dans l'ensemble d'un grand nombre de tirages, laissent de plus en plus apercevoir le rapport des boules blanches aux boules noires contenues dans l'urne, ou les possibilités respectives d'en extraire une boule blanche et une boule noire à chaque tirage. De là résulte le théorème suivant.

La probabilité que le rapport du nombre des boules blanches extraites, au nombre total des boules sorties, ne s'écarte pas de la possibilité d'extraire une boule blanche à chaque tirage, au-delà d'un intervalle donné, approche indéfiniment de la certitude, par la multiplication indéfinie des événemens, quelque petit que l'on suppose cet intervalle.

Ce théorème indiqué par le bon sens, était difficile à démontrer par l'analyse. Aussi l'illustre géomètre Jacques Bernoulli qui s'en est occupé le premier, attachait-il une grande importance à la démonstration qu'il en a donnée. Le calcul des fonctions génératrices, appliqué à cet objet, non-seulement démontre avec facilité ce théorème; mais de plus il donne la probabilité que le rapport des événemens observés, ne s'écarte que dans certaines limites, du vrai rapport de leurs possibilités respectives.

On peut tirer du théorème précédent, cette

conséquence qui doit être regardée comme une loi générale, savoir, que les rapports des effets de la nature, sont à fort peu près constans, quand ces effets sont considérés en grand nombre. Ainsi, malgré la variété des années, la somme des productions pendant un nombre d'années, considérable, est sensiblement la même; ensorte que l'homme, par une utile prévoyance, peut se mettre à l'abri de l'irrégularité des saisons, en répandant également sur tous les temps, les biens que la nature distribue d'une manière inégale. Je n'excepte pas de la loi précédente, les effets dus aux causes morales. Le rapport des naissances annuelles à la population, et celui des mariages aux naissances, n'éprouvent que de très-petites variations : à Paris, le nombre des naissances annuelles a toujours été le même à peu près; et j'ai ouï dire qu'à la poste, dans les temps ordinaires, le nombre des lettres mises au rebut par les défauts des adresses, change peu chaque année.

Il suit encore de ce théorème, que dans une série d'événemens, indéfiniment prolongée, l'action des causes régulières et constantes doit l'emporter à la longue, sur celle des causes irrégulières. C'est ce qui rend les gains des loteries, aussi certains que les produits de l'agriculture; les chances qu'elles se

réservent, leur assurant un bénéfice dans l'ensemble d'un grand nombre de mises. Ainsi des chances favorables et nombreuses étant constamment attachées à l'observation des principes éternels de raison, de justice et d'humanité, qui fondent et maintiennent les sociétés; il y a un grand avantage à se conformer à ces principes, et de graves inconvéniens à s'en écarter. Que l'on consulte les histoires et sa propre expérience; on y verra tous les faits venir à l'appui de ce résultat du calcul. Considérez les avantages que la bonne-foi a procurés aux gouvernemens qui en ont fait la base de leur conduite, et comme ils ont été dédommagés des sacrifices qu'a pu leur coûter une scrupuleuse exactitude à tenir leurs promesses : quel immense crédit au dedans! quelle prépondérance au dehors! Voyez au contraire, dans quel abîme de malheurs, les peuples ont été souvent précipités par l'ambition et la perfidie de leurs chefs. Toutes les fois qu'une grande puissance enivrée de l'amour des conquêtes, aspire à la domination universelle; le sentiment de l'indépendance produit entre les nations injustement attaquées, une coalition dont elle devient presque toujours la victime. Pareillement, au milieu des causes variables qui étendent ou resserrent les divers états; les limites naturelles,

en agissant comme causes constantes, doivent finir par prévaloir. Il importe donc à la stabilité comme au bonheur des empires, de ne pas les étendre au-delà de ces limites dans lesquelles ils sont ramenés sans cesse par l'action de ces causes ; ainsi que les eaux des mers, soulevées par de violentes tempêtes, retombent dans leurs bassins par la pesanteur. C'est encore un résultat du calcul des probabilités, confirmé par de nombreuses et funestes expériences. L'histoire traitée sous le point de vue de l'influence des causes constantes, unirait à l'intérêt de la curiosité, celui d'offrir aux hommes, les plus utiles leçons. Quelquefois on attribue les effets inévitables de ces causes, à des circonstances accidentelles qui n'ont fait que développer leur action. Il est, par exemple, contre la nature des choses, qu'un peuple soit à jamais gouverné par un autre, qu'une vaste mer ou une grande distance en sépare. On peut affirmer qu'à la longue, cette cause constante se joignant sans cesse aux causes variables qui agissent dans le même sens, et que la suite des temps développe, finira par en trouver d'assez fortes pour rendre au peuple soumis, son indépendance naturelle, ou pour le réunir à un état puissant qui lui soit contigu.

Dans un grand nombre de cas, et ce sont

les plus importans de l'analyse des hasards, les possibilités des événemens simples sont inconnues, et nous sommes réduits à chercher dans les événemens passés, des indices qui puissent nous guider dans nos conjectures sur les causes dont ils dépendent. En appliquant l'analyse des fonctions génératrices, au principe exposé ci-devant, sur la probabilité des causes, tirée des événemens observés; on est conduit au théorème suivant.

Lorsqu'un événement simple ou composé de plusieurs événemens simples, tel qu'une partie de jeu, a été répété un grand nombre de fois; les possibilités des événemens simples, qui rendent ce que l'on a observé, le plus probable, sont celles que l'observation indique avec le plus de vraisemblance : à mesure que l'événement observé se répète, cette vraisemblance augmente et finirait par se confondre avec la certitude, si le nombre des répétitions devenait infini.

Il y a ici deux sortes d'approximations; l'une d'elles est relative aux limites prises de part et d'autre, des possibilités qui donnent au passé, le plus de vraisemblance : l'autre approximation se rapporte à la probabilité que ces possibilités tombent dans ces limites. La répétition de l'événement composé accroît de plus en plus cette probabilité, les limites

restant les mêmes : elle resserre de plus en plus l'intervalle de ces limites, la probabilité restant la même : dans l'infini, cet intervalle devient nul, et la probabilité se change en certitude.

Si l'on applique ce théorème, au rapport des naissances des garçons à celles des filles, observé dans les diverses parties de l'Europe; on trouve que ce rapport partout à peu près égal à celui de 22 à 21, indique avec une extrême probabilité, une plus grande facilité dans les naissances des garçons. En considérant ensuite qu'il est le même à Naples qu'à Pétersbourg, on verra qu'à cet égard, l'influence du climat est insensible. On peut donc soupçonner contre l'opinion commune, que cette supériorité des naissances masculines subsiste dans l'orient même. J'avais en conséquence invité les savans français envoyés en Égypte, à s'occuper de cette question intéressante; mais la difficulté d'obtenir des renseignemens précis sur les naissances, ne leur a pas permis de la résoudre.

Le rapport des naissances des garçons à celles des filles, différant très-peu de l'unité; des nombres même assez grands de naissances observées dans un lieu, pourraient offrir à cet égard, un résultat contraire à la loi générale, sans que l'on fût en droit d'en conclure

que cette loi n'y existe pas. Pour tirer cette conséquence, il faut employer de très-grands nombres, et s'assurer qu'elle est indiquée avec une grande probabilité. Buffon cite, par exemple, dans son Arithmétique politique, plusieurs communes de Bourgogne, où les naissances des filles ont surpassé celles des garçons. Parmi ces communes, celle de Carcelle-le-Grignon présente sur 2009 naissances pendant cinq années, 1026 filles et 983 garçons. Quoique ces nombres soient considérables, cependant ils n'indiquent une plus grande possibilité dans les naissances des filles, qu'avec la probabilité $\frac{9}{10}$; et cette probabilité plus petite que celle de ne pas amener *croix* quatre fois de suite, au jeu de *croix* et *pile*, n'est pas suffisante pour rechercher la cause de cette anomalie qui, selon toute vraisemblance, disparaîtrait, si l'on suivait pendant un siècle, les naissances dans cette commune.

Les registres des naissances, que l'on tient avec soin pour assurer l'état des citoyens, peuvent servir à déterminer la population d'un grand empire, sans recourir au dénombrement de ses habitans, opération pénible et difficile à faire avec exactitude. Mais il faut pour cela, connaître le rapport de la population aux naissances annuelles. Le moyen d'y parvenir, le plus précis, consiste 1° à

choisir dans l'empire, des départemens distribués d'une manière à peu près égale sur toute sa surface, afin de rendre le résultat général, indépendant des circonstances locales; 2° à dénombrer avec soin, pour une époque donnée, les habitans de plusieurs communes dans chacun de ces départemens; 3° à déterminer par le relevé des naissances durant plusieurs années qui précèdent et suivent cette époque, le nombre moyen correspondant des naissances annuelles. Ce nombre divisé par celui des habitans, donnera le rapport des naissances annuelles à la population, d'une manière d'autant plus sûre, que le dénombrement sera plus considérable. Le gouvernement convaincu de l'utilité d'un semblable dénombrement, a bien voulu en ordonner l'exécution, à ma prière. Dans trente départemens répandus également sur toute la France, on a fait choix des communes qui pouvaient fournir les renseignemens les plus précis. Leurs dénombremens ont donné 2037615 individus pour la somme totale de leurs habitans au 23 septembre 1802. Le relevé des naissances dans ces communes pendant les années 1800, 1801 et 1802, a donné

Naissances.	Mariages.	Décès.
110312 garçons. 105287 filles.	46037.	103659 hommes. 99443 femmes.

Le rapport de la population aux naissances annuelles est donc 28 $\frac{352845}{1000000}$; il est plus grand qu'on ne l'avait estimé jusqu'ici. En multipliant par ce rapport, le nombre des naissances annuelles en France, on aura la population de ce royaume. Mais quelle est la probabilité que la population ainsi déterminée, ne s'écartera pas de la véritable, au-delà d'une limite donnée ? En résolvant ce problème, et appliquant à sa solution, les données précédentes, j'ai trouvé que le nombre des naissances annuelles en France, étant supposé d'un million, ce qui porte sa population à 28352845 habitans; il y a près de trois cent mille à parier contre un, que l'erreur de ce résultat n'est pas d'un demi-million.

Le rapport des naissances des garçons à celles des filles, qu'offre le relevé précédent, est celui de 22 à 21 ; et les mariages sont aux naissances, comme trois est à quatorze.

A Paris, les baptêmes des enfans des deux sexes s'écartent un peu du rapport de 22 à 21. Depuis 1745, époque à laquelle on a commencé à distinguer les sexes sur les registres des naissances, jusqu'à la fin de 1784, on a baptisé dans cette capitale, 393386 garçons et 377555 filles. Le rapport de ces deux nombres est à peu près celui de 25 à 24; il paraît donc qu'à Paris, une cause particulière rapproche

de l'égalité, les baptêmes des deux sexes. Si l'on applique à cet objet, le calcul des probabilités; on trouve qu'il y a 238 à parier contre un, en faveur de l'existence de cette cause, ce qui suffit pour en autoriser la recherche. En y réfléchissant, il m'a paru que la différence observée tient à ce que les parens de la campagne et des provinces, trouvant quelqu'avantage à retenir près d'eux les garçons, en avaient envoyé à l'hospice des Enfans-Trouvés de Paris, moins relativement aux filles, que suivant le rapport des naissances des deux sexes. C'est ce que le relevé des registres de cet hospice m'a prouvé. Depuis le commencement de 1745 jusqu'à la fin de 1809, il y est entré 163499 garçons, et 159405 filles. Le premier de ces nombres n'excède que d'un trente-huitième, le second qu'il aurait dû surpasser au moins d'un vingt-quatrième. Ce qui confirme l'existence de la cause assignée, c'est qu'en n'ayant point égard aux enfans trouvés, le rapport des naissances des garçons à celles des filles, est à Paris, comme dans le reste de la France, celui de 22 à 21.

La constance de la supériorité des naissances des garçons sur celles des filles, à Paris et à Londres, depuis qu'on les observe, a paru à quelques savans, être une preuve de la providence sans laquelle ils ont pensé que les causes irrégulières qui troublent sans cesse

la marche des événemens, aurait dû plusieurs fois, rendre les naissances annuelles des filles, supérieures à celles des garçons.

Mais cette preuve est un nouvel exemple de l'abus que l'on a fait si souvent des causes finales, qui disparaissent toujours par un examen approfondi des questions, lorsqu'on a les données nécessaires pour les résoudre. La constance dont il s'agit, est un résultat des causes régulières qui donnent la supériorité aux naissances des garçons, et qui l'emportent sur les anomalies dues au hasard, lorsque le nombre des naissances annuelles est considérable. La recherche de la probabilité que cette constance se maintiendra pendant un long espace de temps, appartient à cette branche de l'analyse des hasards qui remonte des événemens passés, à la probabilité des événemens futurs; et il en résulte qu'en partant des naissances observées depuis 1745 jusqu'en 1784, il y a près de quatre à parier contre un, qu'à Paris les naissances annuelles des garçons surpasseront constamment pendant un siècle, les naissances des filles; il n'y a donc aucune raison de s'étonner que cela ait eu lieu pendant un demi-siècle.

Donnons encore un exemple du développement des rapports constans que les événemens présentent, à mesure qu'ils se multiplient.

Concevons une série d'urnes disposées circulairement, et renfermant, chacune, un très-grand nombre de boules blanches et noires: les rapports des boules blanches aux noires, dans ces urnes, pouvant être très-différens à l'origine, et tels, par exemple, que l'une de ces urnes ne renferme que des boules blanches, tandis qu'une autre ne contient que des boules noires. Si l'on tire une boule de la première urne, pour la mettre dans la seconde; qu'après avoir agité cette seconde urne, afin de bien mêler la boule ajoutée, avec les autres, on en tire une boule pour la mettre dans la troisième urne, et ainsi de suite jusqu'à la dernière urne dont on extrait une boule, pour la mettre dans la première, et que l'on recommence indéfiniment cette série de tirages; l'analyse des probabilités nous montre que les rapports des boules blanches aux noires, dans ces urnes, finiront par être les mêmes et égaux au rapport de la somme de toutes les boules blanches, à la somme de toutes les boules noires contenues dans les urnes. Ainsi par ce mode régulier de changement, l'irrégularité primitive de ces rapports, disparaît à la longue, pour faire place à l'ordre le plus simple. Maintenant si entre ces urnes, on en intercale de nouvelles dans lesquelles le rapport de la somme des boules blanches,

à la somme des boules noires qu'elles contiennent, diffère du précédent; en continuant indéfiniment, sur l'ensemble de ces urnes, les extractions que nous venons d'indiquer; l'ordre simple établi dans les anciennes urnes sera d'abord troublé, et les rapports des boules blanches aux boules noires deviendront irréguliers; mais peu à peu, cette irrégularité disparaîtra pour faire place à un nouvel ordre, qui sera enfin celui de l'égalité des rapports des boules blanches aux boules noires contenues dans les urnes. On peut étendre ces résultats, à toutes les combinaisons de la nature, dans lesquelles les forces constantes qui animent les êtres dont elles sont formées, établissent des modes réguliers d'action et de changement.

Les phénomènes qui semblent le plus dépendre du hasard, présentent donc en se multipliant, une tendance à se rapprocher sans cesse, de rapports fixes; de manière que si l'on conçoit de part et d'autre de chacun de ces rapports, un intervalle aussi petit que l'on voudra, la probabilité que le résultat moyen des observations tombe dans cet intervalle, finira par ne différer de la certitude, que d'une quantité au-dessous de toute grandeur assignable. On peut ainsi par le calcul des probabilités, appliqué à un grand nombre

d'observations, reconnaître l'existence de ces rapports. Mais avant que d'en rechercher les causes, il est nécessaire, pour ne point s'égarer dans de vaines spéculations, de s'assurer qu'ils sont indiqués avec une probabilité qui ne permet point de les regarder comme des anomalies dues au hasard. La théorie des fonctions génératrices donne une expression très-simple de cette probabilité, que l'on obtient en intégrant le produit de la différentielle de la quantité dont le résultat déduit d'un grand nombre d'observations s'écarte de la vérité, par une constante moindre que l'unité, dépendante de la nature du problème, et élevée à une puissance dont l'exposant est le rapport du carré de cet écart, au nombre des observations. L'intégrale prise entre des limites données, et divisée par la même intégrale étendue à l'infini positif et négatif, exprimera la probabilité que l'écart de la vérité, est compris entre ces limites. Telle est la loi générale de la probabilité des résultats indiqués par un grand nombre d'observations.

Du Calcul des Probabilités, appliqué à la recherche des phénomènes et de leurs causes.

Les phénomènes de la nature sont le plus souvent enveloppés de tant de circonstances

étrangères, un si grand nombre de causes perturbatrices y mêlent leur influence; qu'il est très-difficile, lorsqu'ils sont fort petits, de les reconnaître. On ne peut alors y parvenir, qu'en multipliant les observations; afin que les effets étrangers venant à se détruire, les résultats moyens mettent en évidence ces phénomènes. On conçoit par ce qui précède, que cela n'a lieu rigoureusement que dans le cas d'un nombre infini d'observations: dans tout autre cas, les phénomènes ne sont indiqués par les résultats moyens, qu'avec une probabilité d'autant plus forte, que les observations sont en plus grand nombre, et dont il importe d'apprécier la valeur.

Prenons pour exemple, la variation diurne de la pression de l'atmosphère à l'équateur où elle est le plus sensible, et le plus facile à reconnaître, les changemens irréguliers du baromètre y étant plus considérables. On remarqua bientôt dans les hauteurs qu'il indique, une petite oscillation diurne dont le *maximum* a lieu vers neuf heures du matin, et le *minimum* vers quatre heures du soir: un second *maximum* a lieu vers onze heures du soir, et le second *minimum* vers quatre heures du matin: les oscillations de la nuit sont moindres que celles du jour, dont l'étendue est de deux millimètres. L'inconstance

de nos climats n'a point dérobé cette variation à nos observateurs, quoiqu'elle y soit moins sensible qu'entre les tropiques. En appliquant l'analyse des probabilités, aux observations nombreuses et précises faites par Ramond, pendant plusieurs années consécutives; je trouve qu'elles indiquent l'existence et la quantité de ce phénomène, de manière à ne laisser aucun doute. La période de sa variation étant d'un jour solaire; sa cause est évidemment la chaleur que le soleil communique aux diverses parties de l'atmosphère; quoiqu'il soit presqu'impossible d'en calculer les effets. Cet astre agit encore par son attraction, sur ce fluide: il y produit avec la lune, des oscillations semblables à celles du flux et du reflux de la mer, oscillations dont j'ai déterminé les lois dans la Mécanique céleste, et qui seront, un jour, reconnues par des observations nombreuses faites à l'équateur avec d'excellens baromètres.

On peut encore par l'analyse des probabilités, vérifier l'existence ou l'influence de certaines causes dont on a cru remarquer l'action sur les êtres organisés. De tous les instrumens que nous pouvons employer pour connaître les agens imperceptibles de la nature, les plus sensibles sont les nerfs, surtout lorsque des causes particulières exaltent leur sensibilité.

C'est par leur moyen, qu'on a découvert la faible électricité que développe le contact de deux métaux hétérogènes ; ce qui a ouvert un champ vaste aux recherches des physiciens et des chimistes. Les phénomènes singuliers qui résultent de l'extrême sensibilité des nerfs dans quelques individus, ont donné naissance à diverses opinions sur l'existence d'un nouvel agent que l'on a nommé *magnétisme animal*, sur l'action du magnétisme ordinaire et l'influence du soleil et de la lune, dans quelques affections nerveuses; enfin sur les impressions que peut faire naître la proximité des métaux ou d'une eau courante. Il est naturel de penser que l'action de ces causes est très-faible, et qu'elle peut être facilement troublée par un grand nombre de circonstances accidentelles. Ainsi, parce qu'elle ne s'est point manifestée dans quelques cas, on ne doit pas rejeter son existence. Nous sommes si éloignés de connaître tous les agens de la nature, et leurs divers modes d'action; qu'il ne serait pas philosophique de nier les phénomènes, uniquement parce qu'ils sont inexplicables dans l'état actuel de nos connaissances. Seulement, nous devons les examiner avec une attention d'autant plus scrupuleuse, qu'il paraît plus difficile de les admettre; et c'est ici que le calcul des probabilités devient

indispensable, pour déterminer jusqu'à quel point il faut multiplier les observations ou les expériences, afin d'obtenir en faveur des agens qu'elles indiquent, une probabilité supérieure aux raisons que l'on peut avoir d'ailleurs, de ne pas les admettre.

Le calcul des probabilités peut faire apprécier les avantages et les inconvéniens des méthodes employées dans les sciences conjecturales. Ainsi, pour reconnaître le meilleur des traitemens en usage dans la guérison d'une maladie, il suffit d'éprouver chacun d'eux sur un même nombre de malades, en rendant toutes les circonstances parfaitement semblables. La supériorité du traitement le plus avantageux se manifestera de plus en plus, à mesure que ce nombre s'accroîtra; et le calcul fera connaître la probabilité correspondante de son avantage. Le même calcul s'étend encore aux objets de l'économie politique, pour laquelle les opérations des gouvernemens sont autant d'expériences en grand, propres à les éclairer sur la conduite qu'ils doivent tenir dans les cas semblables à ceux qui se sont déjà présentés. Tant de causes imprévues ou cachées ou inappréciables influent sur les institutions humaines, qu'il est impossible d'en juger *à priori*, les résultats. Une longue suite d'expériences développe les

effets de ces causes, et indique les moyens de remédier à ceux qui sont nuisibles. On a souvent fait à cet égard, des lois sages; mais parce que l'on avait négligé d'en conserver les motifs, plusieurs ont été abrogées comme inutiles, et il a fallu pour les rétablir, que de fâcheuses expériences en aient fait de nouveau, sentir le besoin. Il est donc bien important de tenir dans chaque branche de l'administration publique, un registre exact des résultats qu'ont produits les divers moyens dont on a fait usage. Appliquons aux sciences politiques et morales, la méthode fondée sur l'observation et le calcul, méthode qui nous a si heureusement servi dans les sciences naturelles. Ne changeons qu'avec une circonspection extrême, nos anciennes institutions et les usages auxquels nos opinions et nos habitudes se sont depuis long-temps pliées. Nous connaissons bien par l'expérience du passé, les inconvéniens qu'ils présentent; mais nous ignorons quelle est l'étendue des maux que leur changement peut produire.

La considération des probabilités, étendue à l'astronomie, peut servir à reconnaître la cause des anomalies observées dans les mouvemens célestes, et à démêler les petites inégalités enveloppées dans les erreurs dont les observations sont susceptibles. Ce fut en

comparant entre elles toutes ses observations; que Ticho-Brahé reconnut la nécessité d'appliquer à la lune, une équation du temps, différente de celle que l'on appliquait au soleil et aux planètes. Ce fut encore dans le résultat d'observations nombreuses, que Mayer aperçut pour la lune, une diminution dans le coefficient de l'inégalité de la précession, relatif aux autres corps célestes. Mais comme cette diminution ne semblait pas résulter de la gravitation universelle; la plupart des astronomes la négligèrent dans leurs calculs. Ayant soumis à l'analyse des probabilités, un grand nombre d'observations lunaires choisies dans cette vue, et que Bouvard voulut bien calculer à ma prière; elle me parut indiquée avec une si forte probabilité, que je crus devoir en rechercher la cause. Je vis bientôt qu'elle ne pouvait être que l'ellipticité du sphéroïde terrestre, négligée jusqu'alors dans la théorie du mouvement lunaire, comme ne devant y produire que des termes insensibles : j'en conclus que ces termes deviennent sensibles par les intégrations successives des équations différentielles. Je déterminai donc ces termes par une analyse particulière, et je découvris d'abord l'inégalité du mouvement lunaire en latitude, qui est proportionnelle au sinus de la longitude de la lune, et qu'aucun astronome

n'avait encore aperçue. Je reconnus ensuite au moyen de cette inégalité, que la théorie de la pesanteur donne en effet la diminution indiquée par Mayer, dans l'équation de la précession, applicable à la lune. La quantité de cette diminution, et le coefficient de l'inégalité précédente en latitude, sont très-propres à fixer l'aplatissement de la terre. Ayant fait part de mes recherches, à Burg qui s'occupait alors à perfectionner les tables de la lune, par la comparaison de toutes les bonnes observations; je le priai de déterminer avec un soin particulier, ces deux quantités. Par un accord très-remarquable, les valeurs qu'il a trouvées, donnent à la terre, le même aplatissement $\frac{1}{305}$, aplatissement qui diffère peu du milieu conclu des mesures des degrés du méridien et du pendule; mais qui, vu l'influence des erreurs des observations et des causes perturbatrices, sur ces mesures, me paraît plus exactement déterminé par ces inégalités lunaires.

Le calcul des probabilités m'a conduit pareillement à la cause des grandes irrégularités de Jupiter et de Saturne. En comparant les observations modernes aux anciennes, Halley trouva une accélération dans le mouvement de Jupiter, et un ralentissement dans celui de Saturne. Pour concilier les observations,

il assujétit ces mouvemens, à deux équations séculaires de signes contraires, et croissantes comme les carrés des temps écoulés depuis 1700. Euler et Lagrange soumirent à l'analyse, les altérations que devoit produire dans ces mouvemens, l'attraction mutuelle des deux planètes. Ils y trouvèrent des équations séculaires; mais leurs résultats étaient si différens, que l'un d'eux, au moins, devait être erroné. Je me déterminai donc à reprendre ce problème important de la mécanique céleste, et je reconnus l'invariabilité des moyens mouvemens planétaires; ce qui fit disparaître les équations séculaires introduites par Halley, dans les tables de Jupiter et de Saturne. Il ne restait ainsi, pour expliquer les grandes irrégularités de ces planètes, que les attractions des comètes auxquelles plusieurs astronomes eurent effectivement recours, ou l'existence d'une inégalité à longue période, produite dans les mouvemens des deux planètes par leur action réciproque, et affectée de signes contraires, pour chacune d'elles. Un théorème que je trouvai sur les inégalités de ce genre, me rendit cette inégalité, très-vraisemblable. Suivant ce théorème, si le mouvement de Jupiter s'accélère, celui de Saturne se ralentit, ce qui est déjà conforme à ce que Halley avait remarqué; mais de plus, l'accélération

de Jupiter, résultante du même théorème, est au ralentissement de Saturne, à très-peu près dans le rapport des équations séculaires proposées par Halley. En considérant les moyens mouvemens de Jupiter et de Saturne, il me fut aisé de reconnaître que deux fois celui de Jupiter, ne surpasse que d'une très-petite quantité, cinq fois celui de Saturne. La période d'une inégalité qui aurait cet argument, serait d'environ neuf siècles. A la vérité, son coefficient serait de l'ordre des cubes des excentricités des orbites; mais je savais qu'en vertu des intégrations successives, il acquiert pour diviseur, le carré du très-petit multiplicateur du temps dans l'argument de cette inégalité, ce qui peut lui donner une grande valeur; il me parut donc très-probable que cette inégalité a lieu. La remarque suivante accrut encore sa probabilité. En supposant son argument nul, vers l'époque des observations de Ticho-Brahé; je vis que Halley avait dû trouver par la comparaison des observations modernes aux anciennes, les altérations qu'il avait indiquées; tandis que la comparaison des observations modernes entre elles, devait offrir des altérations contraires, et pareilles à celles que Lambert avait conclues de cette comparaison. L'existence de cette inégalité me parut donc

extrêmement vraisemblable, et je n'hésitai point à entreprendre le calcul long et pénible, nécessaire pour m'en assurer. Elle fut entièrement confirmée par le résultat de ce calcul qui, de plus, me fit connaître un grand nombre d'autres inégalités dont l'ensemble a porté les tables de Jupiter et de Saturne, à la précision des observations mêmes.

Ce fut encore au moyen du calcul des probabilités, que je reconnus la loi remarquable des mouvemens moyens des trois premiers satellites de Jupiter, suivant laquelle la longitude moyenne du premier, moins trois fois celle du second, plus deux fois celle du troisième est rigoureusement égale à la demi-circonférence. L'approximation avec laquelle les moyens mouvemens de ces astres satisfont à cette loi depuis leur découverte, indiquait son existence avec une vraisemblance extrême; j'en cherchai donc la cause, dans l'action mutuelle de ces trois corps. L'examen approfondi de cette action, me fit voir qu'il a suffi qu'à l'origine, les rapports de leurs moyens mouvemens aient approché de cette loi, dans certaines limites, pour que leur action mutuelle l'ait établie et la maintienne en rigueur.

On voit par là, combien il faut être attentif aux indications de la nature, lorsqu'elles sont

le résultat d'un grand nombre d'observations; quoique d'ailleurs, elles soient inexplicables par les moyens connus. L'extrême difficulté des problèmes relatifs au système du monde, a forcé les géomètres de recourir à des approximations qui laissent toujours à craindre que les quantités négligées n'aient une influence sensible. Lorsqu'ils ont été avertis de cette influence, par les observations; ils sont revenus sur leur analyse : en la rectifiant, ils ont toujours retrouvé la cause des anomalies observées; ils en ont déterminé les lois, et souvent, ils ont devancé l'observation, en découvrant des inégalités qu'elle n'avait pas encore indiquées. Ainsi l'on peut dire que la nature elle-même a concouru à la perfection des théories fondées sur le principe de la pesanteur universelle; et c'est, à mon sens, une des plus fortes preuves de la vérité de ce principe admirable.

L'un des phénomènes les plus remarquables du système du monde, est celui de tous les mouvemens de rotation et de révolution des planètes et des satellites, dans le sens de la rotation du soleil, et à peu près dans le plan de son équateur. Un phénomène aussi remarquable n'est point l'effet du hasard : il indique une cause générale qui a déterminé tous ces mouvemens. Pour avoir la probabilité avec

laquelle cette cause est indiquée; nous observerons que le système planétaire tel que nous le connaissons aujourd'hui, est composé d'onze planètes et de dix-huit satellites. On a reconnu les mouvemens de rotation du soleil, de six planètes, des satellites de Jupiter, de l'anneau de Saturne, et d'un de ses satellites. Ces mouvemens forment avec ceux de révolution, un ensemble de quarante-trois mouvemens dirigés dans le même sens; or on trouve par l'analyse des probabilités, qu'il y a plus de quatre mille milliards à parier contre un, que cette disposition n'est pas l'effet du hasard; ce qui forme une probabilité bien supérieure à celle des événemens historiques sur lesquels on ne se permet aucun doute. Nous devons donc croire, au moins avec la même confiance, qu'une cause primitive a dirigé les mouvemens planétaires; surtout si nous considérons que l'inclinaison du plus grand nombre de ces mouvemens à l'équateur solaire, est fort petite.

Un autre phénomène également remarquable du système solaire, est le peu d'excentricité des orbes des planètes et des satellites, tandis que ceux des comètes sont très-alongés: les orbes de ce système n'offrant point de nuances intermédiaires entre une grande et une petite excentricité. Nous sommes encore

forcés de reconnaître ici l'effet d'une cause régulière : le hasard n'eût point donné une forme presque circulaire aux orbes de toutes les planètes et de leurs satellites ; il est donc nécessaire que la cause qui a déterminé les mouvemens de ces corps, les ait rendus presque circulaires. Il faut encore que les grandes excentricités des orbes des comètes résultent de l'existence de cette cause, sans qu'elle ait influé sur les directions de leurs mouvemens ; car on trouve qu'il y a presque autant de comètes rétrogrades, que de comètes directes, et que l'inclinaison moyenne de tous leurs orbes, approche très-près d'un demi-angle droit, comme cela doit être, si ces corps ont été lancés au hasard.

Quelle que soit la nature de la cause dont il s'agit ; puisqu'elle a produit ou dirigé les mouvemens des planètes, il faut qu'elle ait embrassé tous ces corps ; et vu les distances qui les séparent, elle ne peut avoir été qu'un fluide d'une immense étendue : pour leur avoir donné dans le même sens, un mouvement presque circulaire autour du soleil, il faut que ce fluide ait environné cet astre, comme une atmosphère. La considération des mouvemens planétaires nous conduit donc à penser qu'en vertu d'une chaleur excessive, l'atmosphère du soleil s'est primitivement

étendue au-delà des orbes de toutes les planètes, et qu'elle s'est retirée successivement jusqu'à ses limites actuelles.

Dans l'état primitif où nous supposons le soleil, il ressemblait aux nébuleuses que le télescope nous montre composées d'un noyau plus ou moins brillant, entouré d'une nébulosité qui, en se condensant à la surface du noyau, doit le transformer, un jour, en étoile. Si l'on conçoit par analogie, toutes les étoiles formées de cette manière; on peut imaginer leur état antérieur de nébulosité, précédé lui-même par d'autres états dans lesquels la matière nébuleuse était de plus en plus diffuse, le noyau étant de moins en moins lumineux et dense. On arrive ainsi, en remontant aussi loin qu'il est possible, à une nébulosité tellement diffuse, que l'on pourrait à peine en soupçonner l'existence.

Tel est, en effet, le premier état des nébuleuses que Herschel a observées avec un soin particulier, au moyen de ses puissans télescopes, et dans lesquelles il a suivi les progrès de la condensation, non sur une seule, ces progrès ne pouvant devenir sensibles pour nous, qu'après des siècles, mais sur leur ensemble; à peu près comme on peut dans une vaste forêt, suivre l'accroissement des arbres sur les individus de divers âges, qu'elle

renferme. Il a d'abord observé la matière nébuleuse répandue en amas divers, dans les différentes parties du ciel dont elle occupe une grande étendue. Il a vu dans quelques-uns de ces amas, cette matière faiblement condensée autour d'un ou de plusieurs noyaux peu brillans. Dans d'autres nébuleuses, ces noyaux brillent davantage, relativement à la nébulosité qui les environne. Les atmosphères de chaque noyau, venant à se séparer par une condensation ultérieure, il en résulte des nébuleuses multiples formées de noyaux brillans très-voisins, et environnés, chacun, d'une atmosphère : quelquefois, la matière nébuleuse en se condensant d'une manière uniforme, a produit les nébuleuses que l'on nomme *planétaires*. Enfin, un plus grand degré de condensation transforme toutes ces nébuleuses, en étoiles. Les nébuleuses classées d'après cette vue philosophique, indiquent avec une extrême vraisemblance, leur transformation future en étoiles, et l'état antérieur de nébulosité, des étoiles existantes. Les considérations suivantes viennent à l'appui des preuves tirées de ces analogies.

Depuis long-temps, la disposition particulière de quelques étoiles visibles à la vue simple, a frappé des observateurs philosophes. Mitchel a déjà remarqué combien il est peu

probable que les étoiles des Pléïades, par exemple, aient été resserrées dans l'espace étroit qui les renferme, par les seules chances du hasard; et il en a conclu que ce groupe d'étoiles, et les groupes semblables que le ciel nous présente, sont les effets d'une cause primitive, ou d'une loi générale de la nature. Ces groupes sont un résultat nécessaire de la condensation des nébuleuses à plusieurs noyaux; car il est visible que la matière nébuleuse étant sans cesse attirée par ces noyaux divers; ils doivent former à la longue un groupe d'étoiles, pareil à celui des Pléïades. La condensation des nébuleuses à deux noyaux forme semblablement des étoiles très-rapprochées tournant l'une autour de l'autre, pareilles à celles dont Herschel a déjà considéré les mouvemens respectifs. Telles sont encore la soixante-unième du Cygne et sa suivante, dans lesquelles Bessel vient de reconnaître des mouvemens propres, si considérables et si peu différens, que la proximité de ces astres entre eux, et leur mouvement autour de leur centre commun de gravité, ne doivent laisser aucun doute. Ainsi, l'on descend par les progrès de condensation de la matière nébuleuse, à la considération du soleil environné autrefois d'une vaste atmosphère, considération à laquelle on remonte, comme on l'a vu, par

l'examen des phénomènes du système solaire. Une rencontre aussi remarquable donne à l'existence de cet état antérieur du soleil, une probabilité fort approchante de la certitude.

Mais comment l'atmosphère solaire a-t-elle déterminé les mouvemens de rotation et de révolution des planètes et des satellites? Si ces corps avaient pénétré profondément dans cette atmosphère, sa résistance les aurait fait tomber sur le soleil; on est donc conduit à croire avec beaucoup de vraisemblance, que les planètes ont été formées aux limites successives de l'atmosphère solaire qui en se resserrant par le refroidissement, a dû abandonner dans le plan de son équateur, des zônes de vapeurs, que l'attraction mutuelle de leurs molécules a changées en divers sphéroïdes.

J'ai développé avec étendue, dans mon Exposition du Système du Monde, cette hypothèse qui me paraît satisfaire à tous les phénomènes que ce système nous présente.

Dans cette hypothèse, les comètes sont étrangères au système planétaire. En attachant leur formation, à celle des nébuleuses; on peut les regarder comme de petites nébuleuses à noyaux, errantes de systèmes en systèmes solaires, et formées par la condensation de la matière nébuleuse répandue avec

tant de profusion dans l'univers. Les comètes seraient ainsi par rapport à notre système, ce que les aérolithes sont relativement à la terre, à laquelle ils paraissent étrangers. Lorsque ces astres deviennent visibles pour nous, ils offrent une ressemblance si parfaite avec les nébuleuses, qu'on les confond souvent avec elles; et ce n'est que par leur mouvement, ou par la connaissance de toutes les nébuleuses renfermées dans la partie du ciel où ils se montrent, qu'on parvient à les en distinguer. Cette supposition explique d'une manière heureuse, la grande extension que prennent les têtes et les queues des comètes, à mesure qu'elles approchent du soleil, et l'extrême rareté de ces queues qui malgré leur immense profondeur, n'affaiblissent point sensiblement l'éclat des étoiles que l'on voit à travers.

Lorsque de petites nébuleuses parviennent dans la partie de l'espace où l'attraction du soleil est prédominante, et que nous nommerons *sphère d'activité* de cet astre; il les force à décrire des orbes elliptiques ou hyperboliques. Mais leur vitesse étant également possible suivant toutes les directions, elles doivent se mouvoir indifféremment dans tous les sens et sous toutes les inclinaisons à l'écliptique; ce qui est conforme à ce que l'on observe.

La grande excentricité des orbes cométaires,

résulte encore de l'hypothèse précédente. En effet, si ces orbes sont elliptiques, ils sont très-alongés; puisque leurs grands axes sont au moins égaux au rayon de la sphère d'activité du soleil. Mais ces orbes peuvent être hyperboliques, et si les axes de ces hyperboles ne sont pas très-grands par rapport à la moyenne distance du soleil à la terre, le mouvement des comètes qui les décrivent, paraîtra sensiblement hyperbolique. Cependant sur cent comètes dont on a déjà les élémens, aucune n'a paru se mouvoir dans une hyperbole; il faut donc que les chances qui donnent une hyperbole sensible, soient extrêmement rares par rapport aux chances contraires.

Les comètes sont si petites, que pour devenir visibles, leur distance périhélie doit être peu considérable. Jusqu'à présent cette distance n'a surpassé que deux fois, le diamètre de l'orbe terrestre, et le plus souvent, elle a été au-dessous du rayon de cet orbe. On conçoit que pour approcher si près du soleil, leur vitesse au moment de leur entrée dans sa sphère d'activité, doit avoir une grandeur et une direction, comprises dans d'étroites limites. En déterminant par l'analyse des probabilités, le rapport des chances qui dans ces limites, donnent une hyperbole sensible, aux

chances qui donnent un orbe que l'on puisse confondre avec une parabole; j'ai trouvé qu'il y a six mille au moins, à parier contre l'unité, qu'une nébuleuse qui pénètre dans la sphère d'activité du soleil, de manière à pouvoir être observée, décrira ou une ellipse très-alongée, ou une hyperbole qui par la grandeur de son axe, se confondra sensiblement avec une parabole, dans la partie que l'on observe; il n'est donc pas surprenant que jusqu'ici, l'on n'ait point reconnu de mouvemens hyperboliques.

L'attraction des planètes, et peut-être encore la résistance des milieux éthérés, a dû changer plusieurs orbes cométaires, dans des ellipses dont le grand axe est moindre que le rayon de la sphère d'activité du soleil; ce qui augmente les chances des orbes elliptiques. On peut croire que ce changement a eu lieu pour la comète de 1682, la seule dont on ait jusqu'à présent, déterminé la révolution.

Des milieux qu'il faut choisir entre les résultats d'un grand nombre d'observations.

La recherche de ces milieux est très-importante dans la philosophie naturelle; et l'analyse qu'elle exige, est la plus délicate et la plus épineuse de toute la théorie des

probabilités. Les observations et les expériences les plus précises sont toujours sujettes à des erreurs qui influent sur la valeur des élémens que l'on veut en déduire. Pour faire disparaître ces erreurs, autant qu'il est possible, en les détruisant les unes par les autres; on multiplie les observations dont le résultat moyen est d'autant plus exact, que leur nombre est plus considérable. Mais quelle est la manière la plus avantageuse de former ce résultat moyen? De quelle erreur ce résultat est-il encore susceptible? C'est ce que l'analyse des probabilités peut seule faire connaître; et voici ce qu'elle nous apprend.

Pour fixer les idées, supposons que l'on cherche à déterminer par l'observation, la grandeur apparente d'un disque vu d'une distance donnée. Si l'on a pris un grand nombre de mesures du disque avec des instrumens semblables, et à une même distance de ce disque; on aura sa grandeur moyenne apparente, en divisant la somme de toutes les mesures partielles, par le nombre de ces mesures. Pour avoir l'erreur moyenne à craindre en plus ou en moins, sur ce résultat; nous observerons que cette erreur est la somme des produits de chaque erreur possible, par sa probabilité. Une erreur, soit positive, soit négative, devant être considérée comme une

perte au jeu, on doit évaluer l'erreur moyenne, comme on évaluerait une perte moyenne. En déterminant par l'analyse des fonctions génératrices, l'expression de cette erreur; on trouve qu'elle a pour facteur, une quantité dépendante de la loi de probabilité des erreurs de chaque mesure. Cette loi nous est inconnue: seulement, il est naturel d'admettre que les erreurs négatives sont aussi probables que les positives; il semble donc impossible d'évaluer cette erreur moyenne. Mais en déterminant par la même analyse, la somme des carrés des erreurs des observations; j'ai reconnu qu'elle a le même facteur. De là, j'ai conclu la règle suivante.

Si l'on prend les différences entre le résultat moyen de toutes les mesures, et chacune d'elles; l'erreur moyenne à craindre en plus ou en moins sur ce résultat, est une fraction dont le numérateur est la racine carrée de la somme des carrés de ces différences, et dont le dénominateur est le produit du nombre des mesures, par la racine carrée du rapport de la circonférence au rayon.

On a ainsi le résultat moyen le plus avantageux, et l'on peut en apprécier l'exactitude. Pour rapporter ensuite ce résultat, à la distance donnée; il suffit de le multiplier par

le rapport inverse de cette distance, à celle d'où les mesures ont été prises.

Supposons maintenant que l'on ait pris ces mesures, à différentes distances; et que l'on veuille toujours en conclure la grandeur apparente du disque vu d'une distance donnée. Il est clair que l'erreur de chaque observation aura d'autant moins d'influence, que l'observation aura été faite plus près du disque; il est encore facile de voir que chaque mesure observée, moins son erreur, doit être égale à la grandeur que l'on cherche, multipliée par le rapport de la distance donnée, à la distance d'où la mesure a été prise. En considérant la grandeur cherchée, comme une inconnue; chaque mesure observée donnera une équation du premier degré dont le premier membre sera le produit de l'inconnue, par ce rapport; et dont le second membre sera la mesure observée, moins son erreur. Si l'on ajoute toutes ces équations, leur ensemble formera une équation finale qui, en supposant nulle, la somme des erreurs de toutes les observations, donnera une valeur de l'inconnue, à laquelle toutes les observations auront concouru, et qui par là, doit avoir une grande précision. C'est la règle que l'on suit communément; mais elle ne donne pas le résultat le plus

avantageux, celui qui ne laisse à craindre que la plus petite erreur moyenne. Pour avoir ce résultat, on doit observer que toutes les manières possibles de combiner les équations précédentes, afin d'obtenir une équation finale du premier degré, qui détermine l'inconnue, reviennent à les multiplier, chacune, par un facteur, et à les ajouter ensuite sans avoir égard aux erreurs des observations. En prenant donc pour ces facteurs, des constantes arbitraires, et cherchant l'expression analytique de l'erreur moyenne du résultat donné par l'équation finale; il faut déterminer les constantes, ensorte que cette erreur soit un *minimum*. On trouve alors que chaque constante est égale au coefficient de l'inconnue, dans l'équation partielle qu'elle multiplie; la valeur de l'inconnue, donnée par l'équation finale, est ainsi exprimée par une fraction qui a pour numérateur, la somme des produits du coefficient de l'inconnue dans chaque équation partielle, par la mesure observée correspondante; et pour dénominateur, la somme des carrés de tous ces coefficiens. Si l'on prend ensuite les différences entre les mesures observées, et les produits successifs de ce résultat par les coefficiens de l'inconnue dans les équations partielles; l'erreur moyenne qu'il laisse encore à craindre, sera

la racine carrée d'une fraction dont le numérateur est la somme des carrés de ces différences, et dont le dénominateur est le produit de ces trois quantités, savoir, le nombre des observations, la somme des carrés des coefficiens de l'inconnue, dans les équations partielles, et la circonférence dont le rayon est l'unité.

Il est facile de voir que si l'on élève au carré, l'expression de l'erreur de chaque mesure, tirée de l'équation partielle correspondante; si l'on rend ensuite, un *minimum*, la somme de ces carrés, en y faisant varier l'inconnue; l'équation du *minimum* donnera pour cette inconnue, la valeur précédente.

Dans un grand nombre de cas, et spécialement en astronomie, les élémens que l'on veut déterminer, sont déjà connus à fort peu près, et n'ont besoin que de légères corrections que l'on cherche à obtenir par des observations nombreuses et précises. Pour cela, on regarde chaque observation, comme une fonction des élémens. En substituant dans cette fonction, la valeur approchée de chaque élément, plus sa correction considérée comme une inconnue; en développant ensuite, la fonction, dans une série ordonnée par rapport aux puissances et aux produits de ces inconnues, et négligeant, vu leur petitesse, les

carrés et ces produits; enfin, en égalant la série, à l'observation diminuée de son erreur; on forme une équation du premier degré entre ces inconnues. C'est ce que l'on nomme *équation de condition*. On combine ensuite ces équations de condition, de manière à les réduire à un nombre d'équations finales, égal à celui des inconnues. La résolution de ces équations donne les valeurs des inconnues, ou les corrections des divers élémens.

La manière la plus générale de former ces équations finales, consiste à multiplier chacune des équations de condition, par un facteur indéterminé : la somme de ces produits, en y supposant nul, tout ce qui est relatif aux erreurs des observations, donnera une première équation finale. Un second système de facteurs donnera une seconde équation finale, et ainsi des autres. L'analyse des fonctions génératrices donne l'expression de l'erreur moyenne à craindre sur la correction de chaque élément, obtenue par la résolution de ces équations finales. Si l'on détermine les facteurs, par la condition que chacune de ces expressions soit un *minimum;* on trouve que le premier système de facteurs est formé des coefficiens de la première inconnue, dans chaque équation de condition; que le second système est formé des coefficiens de la seconde

inconnue, etc.; d'où il est facile de conclure que les corrections des élémens, les plus avantageuses, sont généralement, comme dans le cas d'une seule variable, celles que l'on obtient, lorsqu'on rend un *minimum*, la somme des carrés des erreurs de chaque observation, en y faisant varier successivement les corrections inconnues. Dans ce cas général, l'analyse donne l'expression de l'erreur moyenne à craindre encore sur chaque élément; mais quoique très-simple, cette expression ne peut pas être comprise sans le secours de l'algèbre.

Nous avons supposé fort grand, le nombre des observations; et la règle précédente est d'autant plus exacte, que ce nombre est plus considérable. Mais dans le cas même où il est petit, il paraît naturel d'employer la même règle qui dans tous les cas, offre un moyen simple d'obtenir sans tâtonnement, les corrections que l'on cherche à déterminer.

Cette règle peut servir encore à comparer la précision de diverses tables astronomiques d'un même astre. Ces tables peuvent toujours être supposées réduites à la même forme, et alors elles ne diffèrent que par les époques, les moyens mouvemens, et les coefficiens des argumens; car si l'une d'elles contient un argument qui ne se trouve point dans les autres, il est clair que cela revient à supposer

nul dans celles-ci, le coefficient de cet argument. Maintenant, si l'on rectifiait ces tables, en les comparant à la totalité des bonnes observations; elles satisferaient, par ce qui précède, à la condition que la somme des carrés des erreurs soit un *minimum;* les tables qui comparées à un nombre considérable d'observations, approchent le plus, de cette condition, méritent donc la préférence.

Des Tables de mortalité, et des durées moyennes de la vie, des mariages et des associations quelconques.

La manière de former les tables de mortalité, est très-simple. On prend sur les registres des naissances et des morts, un grand nombre d'enfans que l'on suit pendant le cours de leur vie, en déterminant combien il en reste à la fin de chaque année de leur âge, et l'on écrit ce nombre vis-à-vis de l'année finissante. Mais comme dans les deux premières années de la vie, la mortalité est très-rapide; il faut pour plus d'exactitude, indiquer dans ce premier âge, le nombre des survivans à la fin de chaque demi-année.

Si l'on divise la somme des années de la vie de tous les individus inscrits dans une table de mortalité, par le nombre de ces individus, et

si de ce quotient, on soustrait une demi-année; on aura la durée moyenne de la vie, que l'on trouve ainsi de vingt-huit ans et demi à peu près. Cette soustraction ne doit avoir lieu, que dans le cas où la table n'indique point le nombre des vivans à la fin de la première demi-année : elle est fondée sur ce que la mortalité pouvant être supposée uniformément répandue sur la première année; la partie de la durée moyenne de la vie, correspondante à cette année, n'est que la moitié de celle qui aurait lieu, si la mort ne frappait les individus qu'à la fin de l'année. La durée moyenne de ce qui reste encore à vivre, lorsqu'on est parvenu à un âge quelconque, se détermine en faisant une somme des années qu'ont vécu au-delà de cet âge, tous les individus qui l'ont atteint; en la divisant par le nombre de ces individus, et en retranchant une demi-année, de ce quotient. Ce n'est point au moment de la naissance, que la durée moyenne de la vie, est la plus grande; c'est lorsqu'on a échappé aux dangers de la première enfance, et alors elle est d'environ quarante-trois ans. La probabilité d'arriver à un âge quelconque, en partant d'un âge donné, est égale au rapport des deux nombres d'individus indiqués dans la table, à ces deux âges.

La précision de ces résultats exige que pour la formation des tables, on emploie un très-grand nombre de naissances. L'analyse donne alors des formules très-simples pour apprécier la probabilité que les nombres indiqués dans ces tables ne s'écarteront de la vérité, que dans d'étroites limites. On voit par ces formules, que l'intervalle des limites diminue, et que la probabilité augmente, à mesure que l'on considère plus de naissances; ensorte que les tables représenteraient exactement la vraie loi de la mortalité, si le nombre des naissances employées devenait infini.

Une table de mortalité est donc une table des probabilités de la vie humaine. Le rapport des individus inscrits à côté de chaque année, au nombre des naissances, est la probabilité qu'un nouveau-né atteindra cette année. Comme on estime la valeur de l'espérance, en faisant une somme des produits de chaque bien espéré par la probabilité de l'obtenir; on peut également évaluer la durée moyenne de la vie, en ajoutant les produits de chaque année par la probabilité d'y arriver. Ainsi en formant une suite de fractions dont le dénominateur commun est le nombre des nouveau-nés de la table, et dont les numérateurs sont les nombres inscrits à côté de chaque

année; la somme de toutes ces fractions sera la durée moyenne de la vie, dont il faut pour plus d'exactitude, retrancher une demi-année; ce qui conduit au même résultat que la règle précédente. Mais cette manière d'envisager la durée moyenne de la vie, a l'avantage de faire voir que dans une population stationnaire, c'est-à-dire telle que le nombre des naissances égale celui des morts; la durée moyenne de la vie est le rapport même de la population aux naissances annuelles; car la population étant supposée stationnaire, le nombre des individus d'un âge compris entre deux années consécutives de la table, est égal au nombre des naissances annuelles, multiplié par la demi-somme des probabilités d'atteindre ces années; la somme de tous ces produits sera donc la population entière; or il est aisé de voir que cette somme divisée par le nombre des naissances annuelles, coïncide avec la durée moyenne de la vie, telle que nous venons de la définir.

Il est facile au moyen d'une table de mortalité, de former la table correspondante de la population supposée stationnaire. Pour cela, on prend des moyennes arithmétiques entre les nombres de la table de mortalité correspondans aux âges, zéro et un an, un et deux ans, deux et trois ans, etc. La somme de

toutes ces moyennes est la population entière: on l'écrit à côté de l'âge zéro. On retranche de cette somme, la première moyenne; et le reste est le nombre des individus d'un an et au-dessus : on l'écrit à côté de l'année 1. On retranche de ce premier reste, la seconde moyenne; ce second reste est le nombre des individus de deux années, et au-dessus : on l'écrit à côté de l'année 2 ; et ainsi de suite.

Tant de causes variables influent sur la mortalité, que les tables qui la représentent, doivent changer suivant les lieux et les temps. Les divers états de la vie offrent à leur égard, des différences sensibles relatives aux fatigues et aux dangers inséparables de chaque état, et dont il est indispensable de tenir compte dans les calculs fondés sur la durée de la vie. Mais ces différences n'ont pas encore été suffisamment observées. Elles le seront, un jour; alors on saura quel sacrifice de la vie, chaque profession exige, et l'on profitera de ces connaissances, pour en diminuer les dangers.

La salubrité plus ou moins grande du sol, sa température, les mœurs des habitans, et les opérations des gouvernemens ont sur la mortalité, une influence considérable. Mais il faut toujours faire précéder la recherche de la cause des différences observées, par celle de la probabilité avec laquelle cette cause est

indiquée. Ainsi le rapport de la population aux naissances annuelles, que l'on a vu s'élever en France, à vingt-huit et un tiers, n'est pas égal à vingt-cinq dans l'ancien duché de Milan. Ces rapports établis l'un et l'autre, sur un grand nombre de naissances, ne permettent pas de révoquer en doute, l'existence dans le Milanais, d'une cause spéciale de mortalité, qu'il importe au gouvernement de ce pays, de rechercher et de faire disparaître.

Le rapport de la population aux naissances s'accroîtrait encore, si l'on parvenait à diminuer ou à éteindre quelques maladies dangereuses et très-répandues. C'est ce que l'on a fait heureusement pour la petite vérole, d'abord par l'inoculation de cette maladie; ensuite d'une manière beaucoup plus avantageuse, par l'inoculation de la vaccine, découverte inestimable de Jenner qui par là s'est rendu l'un des plus grands bienfaiteurs de l'humanité.

La petite vérole a cela de particulier, savoir que le même individu n'en est pas deux fois atteint, ou du moins, ce cas est si rare, que l'on peut en faire abstraction dans le calcul. Cette maladie à laquelle peu de monde échappait avant la découverte de la vaccine, est souvent mortelle et fait périr un septième de ceux qu'elle attaque. Quelquefois, elle est

bénigne, et l'expérience a fait connaître qu'on lui donnait ce dernier caractère, en l'inoculant sur des personnes saines, préparées par un bon régime, et dans une saison favorable. Alors le rapport des individus qu'elle fait périr, aux inoculés, n'est pas un trois-centième. Ce grand avantage de l'inoculation, joint à ceux de ne point altérer la beauté, et de préserver des suites fâcheuses que la petite vérole naturelle entraîne souvent après elle, la fit adopter par un grand nombre de personnes. Sa pratique fut vivement recommandée; mais, ce qui arrive presque toujours dans les choses sujettes à des inconvéniens, elle fut vivement combattue. Au milieu de cette dispute, Daniel Bernoulli se proposa de soumettre au calcul des probabilités, l'influence de l'inoculation sur la durée moyenne de la vie. Manquant de données précises sur la mortalité produite par la petite vérole, aux divers âges de la vie; il supposa que le danger d'avoir cette maladie et celui d'en périr, sont les mêmes à tout âge. Au moyen de ces suppositions, il parvint par une analyse délicate, à convertir une table ordinaire de mortalité, dans celles qui auraient lieu, si la petite vérole n'existait pas, ou si elle ne faisait périr qu'un très-petit nombre de malades; et il en conclut que l'inoculation augmenterait de trois ans au

moins, la durée moyenne de la vie; ce qui lui parut mettre hors de doute, l'avantage de cette opération. D'Alembert attaqua l'analyse de Bernoulli, d'abord sur l'incertitude de ses deux hypothèses; ensuite, sur son insuffisance, en ce que l'on n'y faisait point entrer la comparaison du danger prochain quoique très-petit, de périr par l'inoculation, au danger beaucoup plus grand, mais plus éloigné, de succomber à la petite vérole naturelle. Cette considération qui disparaît, lorsque l'on considère un grand nombre d'individus, est par là, indifférente aux gouvernemens, et laisse subsister pour eux, les avantages de l'inoculation; mais elle est d'un grand poids pour un père de famille qui doit craindre, en faisant inoculer ses enfans, de voir bientôt périr ce qu'il a de plus cher au monde, et d'en être cause. Beaucoup de parens étaient retenus par cette crainte, que la découverte de la vaccine a heureusement dissipée. Par un de ces mystères que la nature nous offre si fréquemment, le vaccin est un préservatif de la petite vérole, aussi sûr que le virus variolique, et il n'a aucun danger: il n'expose à aucune maladie, et ne demande que très-peu de soins. Aussi sa pratique s'est-elle promptement répandue, et pour la rendre universelle, il ne reste plus à vaincre que

l'inertie naturelle du peuple, contre laquelle il faut lutter sans cesse, même lorsqu'il s'agit de ses plus chers intérêts.

Le moyen le plus simple de calculer l'avantage que produirait l'extinction d'une maladie, consiste à déterminer par l'observation, le nombre d'individus d'un âge donné, qu'elle fait périr, chaque année, et à le retrancher du nombre des morts au même âge. Le rapport de la différence, au nombre total d'individus de l'âge donné, serait la probabilité de périr à cet âge, si la maladie n'existait pas. En faisant donc une somme de ces probabilités depuis la naissance jusqu'à un âge quelconque, et retranchant cette somme de l'unité; le reste sera la probabilité de vivre jusqu'à cet âge, correspondante à l'extinction de la maladie. La série de ces probabilités sera la table de mortalité, relative à cette hypothèse; et l'on en conclura par ce qui précède, la durée moyenne de la vie. C'est ainsi que Duvilard a trouvé l'accroissement de la durée moyenne de la vie, dû à l'inoculation de la vaccine, de trois ans au moins. Un accroissement aussi considérable en produirait un fort grand dans la population, si d'ailleurs, elle n'était pas restreinte par la diminution relative des subsistances.

C'est principalement par le défaut des

subsistances, que la marche progressive de la population est arrêtée. Dans toutes les espèces d'animaux et de végétaux, la nature tend sans cesse à augmenter le nombre des individus, jusqu'à ce qu'ils soient au niveau des moyens de subsister. Dans l'espèce humaine, les causes morales ont une grande influence sur la population. Si le sol, par de faciles défrichemens, peut fournir une nourriture abondante à des générations nouvelles; la certitude de faire vivre une nombreuse famille, encourage les mariages, et les rend plus précoces et plus féconds. Sur un sol pareil, la population et les subsistances doivent croître à-la-fois en progression géométrique. Mais quand les défrichemens deviennent plus difficiles et plus rares; alors l'accroissement de la population diminue : elle se rapproche continuellement de l'état variable des subsistances, en faisant autour de lui, des oscillations, à peu près comme un pendule dont on promène d'un mouvement retardé, le point de suspension, oscille autour de ce point, par sa pesanteur. Il est difficile d'évaluer le *maximum* d'accroissement de la population : il paraît d'après quelques observations, que dans de favorables circonstances, la population de l'espèce humaine pourrait doubler, tous les quinze ans. On estime que dans

l'Amérique septentrionale, la période de ce doublement est de vingt-cinq années. Dans cet état de choses, la population, les naissances, les mariages, la mortalité, tout croît suivant la même progression géométrique dont on a le rapport constant des termes consécutifs, par l'observation des naissances annuelles à deux époques.

Une table de mortalité, représentant les probabilités de la vie humaine; on peut déterminer à son moyen, la durée des mariages. Supposons pour simplifier, que la mortalité soit la même pour les deux sexes; on aura la probabilité que le mariage subsistera un an, ou deux, ou trois, etc.; en formant une suite de fractions dont le dénominateur commun, est le produit des deux nombres de la table, correspondans aux âges des conjoints, et dont les numérateurs sont les produits successifs des nombres correspondans à ces âges augmentés d'une année, de deux, de trois, etc. La somme de ces fractions, augmentée d'un demi, sera la durée moyenne du mariage, l'année étant prise pour unité. Il est facile d'étendre la même règle, à la durée moyenne d'une association formée de trois ou d'un plus grand nombre d'individus.

Des bénéfices et des établissemens qui dépendent de la probabilité des événemens.

Rappelons ici ce que nous avons dit en parlant de l'espérance. On a vu que pour avoir l'avantage qui résulte de plusieurs événemens simples, dont les uns produisent un bien, et les autres une perte; il faut ajouter les produits de la probabilité de chaque événement favorable, par le bien qu'il procure, et retrancher de leur somme, celle des produits de la probabilité de chaque événement défavorable, par la perte qui y est attachée. Mais quel que soit l'avantage exprimé par la différence de ces sommes, un seul événement composé de ces événemens simples, ne garantit point de la crainte d'éprouver une perte réelle. On conçoit que cette crainte doit diminuer lorsque l'on multiplie l'événement composé. L'analyse des probabilités conduit à ce théorème général.

Par la répétition d'un événement avantageux, simple ou composé, le bénéfice réel devient de plus en plus probable, et s'accroît sans cesse : il devient certain, dans l'hypothèse d'un nombre infini de répétitions; et en le divisant par ce nombre, le quotient ou le bénéfice moyen de chaque événement, est

l'espérance mathématique elle-même, ou l'avantage relatif à l'événement. Il en est de même de la perte qui devient certaine à la longue, pour peu que l'événement soit désavantageux.

Ce théorème sur les bénéfices et les pertes, est analogue à ceux que nous avons donnés précédemment sur les rapports qu'indique la répétition indéfinie des événemens simples ou composés ; et comme eux, il prouve que la régularité finit par s'établir dans les choses même, les plus subordonnées à ce que nous nommons *hasard*.

Lorsque les événemens sont en grand nombre, l'analyse donne encore une expression fort simple de la probabilité que le bénéfice réel sera compris dans des limites déterminées, expression qui rentre dans la loi générale de la probabilité, que nous avons donnée ci-dessus, en parlant des probabilités qui résultent de la multiplication indéfinie des événemens.

C'est de la vérité du théorème précédent, que dépend la stabilité des établissemens fondés sur les probabilités. Mais pour qu'il puisse leur être appliqué, il faut que ces établissemens, par de nombreuses affaires, multiplient les événemens avantageux.

On a fondé sur les probabilités de la vie

humaine, divers établissemens, tels que les rentes viagères et les tontines. La méthode la plus générale et la plus simple de calculer les bénéfices et les charges de ces établissemens, consiste à les réduire en capitaux actuels. L'intérêt annuel de l'unité, est ce que l'on nomme *taux de l'intérêt.* A la fin de chaque année, un capital acquiert pour facteur, l'unité plus le taux de l'intérêt; il croît donc suivant une progression géométrique dont ce facteur est la raison. Ainsi par l'effet du temps, il devient immense. Si, par exemple, le taux de l'intérêt est $\frac{1}{20}$ ou de cinq pour cent; le capital double à fort peu près en quatorze ans, quadruple en vingt-neuf ans, et dans moins de trois siècles, il devient deux millions de fois plus considérable.

Un accroissement aussi prodigieux a fait naître l'idée de s'en servir, pour amortir la dette publique. Si l'on crée un premier fonds d'amortissement que l'on place sans cesse avec les intérêts, sur les effets publics, en profitant surtout des momens de baisse; et si, lorsque les besoins de l'état obligent à faire des emprunts, on en consacre une partie, à l'accroissement du fonds d'amortissement; il est visible que ces opérations auront le double avantage d'accroître ce fonds, et de soutenir le crédit et les effets publics; et qu'à la longue,

la caisse d'amortissement absorbera une grande partie de la dette nationale. D'heureuses expériences ont pleinement confirmé ces avantages. Mais la fidélité dans les engagemens et la stabilité, si nécessaires au succès de pareils établissemens, ne peuvent être bien garanties, que par un gouvernement représentatif.

Il résulte de ce qui précède, que le capital actuel équivalent à une somme qui ne doit être payée qu'après un certain nombre d'années, est égal à cette somme multipliée par la probabilité qu'elle sera payée à cette époque, et divisée par l'unité augmentée du taux de l'intérêt, élevée à une puissance exprimée par le nombre de ces années.

Il est facile d'appliquer ce principe, aux rentes viagères sur une ou plusieurs têtes, et aux caisses d'épargne et d'assurance d'une nature quelconque. Supposons que l'on se propose de former une table de rentes viagères, d'après une table donnée de mortalité. Une rente viagère payable au bout de cinq ans, par exemple, et réduite en capital actuel, est par ce principe, égale au produit des deux quantités suivantes, savoir, la rente divisée par la cinquième puissance de l'unité augmentée du taux de l'intérêt, et la probabilité de la payer. Cette probabilité est le rapport

inverse du nombre des individus inscrits dans la table, vis-à-vis de l'âge de celui qui constitue la rente, au nombre inscrit vis-à-vis de cet âge augmenté de cinq années. En formant donc une suite de fractions dont les dénominateurs sont les produits du nombre de personnes indiquées dans la table de mortalité, comme vivantes à l'âge de celui qui constitue la rente, par les puissances successives de l'unité augmentée du taux de l'intérêt, et dont les numérateurs sont les produits de la rente, par le nombre des personnes vivantes au même âge augmenté successivement d'une année, de deux années, etc., la somme de ces fractions sera le capital requis pour la rente viagère à cet âge.

Supposons maintenant qu'une personne veuille, au moyen d'une rente viagère, assurer à ses héritiers, un capital payable à la fin de l'année de sa mort. Pour déterminer la valeur de cette rente, on peut imaginer que la personne emprunte en viager à une caisse, ce capital divisé par l'unité augmentée du taux de l'intérêt, et qu'elle le place à intérêt perpétuel à la même caisse. Il est clair que ce capital sera dû par la caisse, à ses héritiers, à la fin de l'année de sa mort; mais elle n'aura payé, chaque année, que l'excès de l'intérêt viager sur l'intérêt perpétuel. La table

des rentes viagères fait donc connaître ce que la personne doit payer annuellement à la caisse, pour assurer ce capital après sa mort.

Les assurances maritimes, celles contre les incendies et les orages, et généralement tous les établissemens de ce genre, se calculent par les mêmes principes. Un négociant a des vaisseaux en mer, il veut assurer leur valeur et celle de leur cargaison, contre les dangers qu'ils peuvent courir : pour cela il donne une somme à une compagnie, qui lui répond de la valeur estimée de ses cargaisons et de ses vaisseaux. Le rapport de cette valeur à la somme qui doit être donnée pour prix de l'assurance, dépend des dangers auxquels les vaisseaux sont exposés, et ne peut être apprécié que par des observations nombreuses sur le sort des vaisseaux partis du port pour la même destination.

Si l'assureur ne donnait à la compagnie d'assurance, que la somme indiquée par le calcul des probabilités, cette compagnie ne pourrait pas subvenir aux dépenses de son établissement; il faut donc qu'il paie d'une somme plus forte, le prix de son assurance. Mais alors quel est son avantage? C'est ici que la considération de l'espérance morale devient nécessaire. On conçoit que le jeu le plus égal devenant, comme on l'a vu précédemment,

désavantageux, parce qu'il échange une mise certaine, contre un bénéfice incertain; l'assurance par laquelle on échange l'incertain contre le certain, doit être avantageuse. C'est en effet, ce qui résulte de la règle que nous avons donnée ci-dessus pour déterminer l'espérance morale, et par laquelle on voit de plus jusqu'où peut s'étendre le sacrifice que l'on doit faire à la compagnie d'assurance, en conservant toujours un avantage moral. Cette compagnie peut donc en procurant cet avantage, faire elle-même un grand bénéfice, si le nombre des assureurs est très-considérable, condition nécessaire à son existence durable. Alors son bénéfice devient certain, et ses espérances mathématique et morale coïncident. Car l'analyse conduit à ce théorème général, savoir, que si les expectatives sont très-nombreuses, les deux espérances approchent sans cesse l'une de l'autre, et finissent par coïncider dans le cas d'un nombre infini d'expectatives.

Parmi les établissemens fondés sur les probabilités de la vie humaine, les plus utiles sont ceux dans lesquels, au moyen d'un léger sacrifice de son revenu, on assure l'existence de sa famille pour un temps où l'on doit craindre de ne plus suffire à ses besoins. Autant le jeu est immoral, autant ces établissemens sont

avantageux aux mœurs, en favorisant les plus doux penchans de la nature. Le Gouvernement doit donc les encourager et les respecter dans ses vicissitudes; car les espérances qu'ils présentent, portant sur un avenir éloigné, ils ne peuvent prospérer qu'à l'abri de toute inquiétude sur leur durée.

Disons un mot des emprunts. Il est clair que pour emprunter en perpétuel, il faut payer, chaque année, le produit du capital par le taux de l'intérêt. Mais on peut vouloir acquitter ce capital, en paiemens égaux faits pendant un nombre déterminé d'années, paiemens que l'on nomme *annuités*, et dont on obtient ainsi la valeur. Chaque annuité, pour être réduite au moment actuel, doit être divisée par l'unité augmentée du taux de l'intérêt, et élevée à une puissance égale au nombre des années après lesquelles on doit payer cette annuité. En formant donc une progression géométrique dont le premier terme est l'annuité divisée par l'unité augmentée du taux de l'intérêt, et dont le dernier est cette annuité divisée par la même quantité élevée à une puissance égale au nombre des années pendant lesquelles le paiement doit avoir lieu; la somme de cette progression sera équivalente au capital emprunté; ce qui détermine la valeur de l'annuité. Si l'on veut faire un

emprunt viager; on observera que les tables de rentes viagères donnant le capital requis pour constituer une rente viagère, à un âge quelconque; une simple proportion donnera la rente que l'on doit faire à l'individu dont on emprunte un capital. On peut calculer par ces principes, tous les modes possibles d'emprunt.

Des illusions dans l'estimation des probabilités.

L'esprit a ses illusions, comme le sens de la vue; et de même que le toucher rectifie celles-ci, la réflexion et le calcul corrigent également les premières. La probabilité fondée sur une expérience journalière, ou exagérée par la crainte et l'espérance, nous frappe plus qu'une probabilité supérieure, mais qui n'est qu'un simple résultat du calcul. Ainsi nous ne craignons point pour de faibles avantages, d'exposer notre vie, à des dangers beaucoup moins invraisemblables que la sortie d'un quine à la loterie de France; et cependant personne ne voudrait se procurer les mêmes avantages, avec la certitude de perdre la vie, si ce quine arrivait.

Nos passions, nos préjugés, et les opinions dominantes, en exagérant les probabilités qui

leur sont favorables, et en atténuant les probabilités contraires, sont des sources abondantes d'illusions dangereuses.

Les maux présens et la cause qui les fait naître, nous affectent beaucoup plus, que le souvenir des maux produits par la cause contraire, et nous empêchent d'apprécier avec justesse, la probabilité des moyens propres à nous préserver des uns et des autres. C'est ce qui porte alternativement vers le despotisme et vers l'anarchie, les peuples sortis de l'état du repos, dans lequel ils ne rentrent jamais qu'après de longues et cruelles agitations.

Cette impression vive que nous recevons de la présence des événemens, et qui nous laisse à peine remarquer les événemens contraires observés par d'autres, est une cause principale d'erreurs, dont on ne peut trop se garantir. Nous croyons voir, par exemple, avec évidence, la vérité d'un fait attesté par des hommes dont nous avons souvent reconnu la véracité, surtout lorsqu'il est accompagné de circonstances qui viennent à l'appui de leur témoignage, et que nous avons pris soin de vérifier nous-mêmes. Accoutumés à nous conduire d'après de semblables preuves, et n'ayant jamais été trompés par elles, nous les regardons comme infaillibles; et s'il s'agit d'un

délit, nous ne balançons point à condamner l'individu qu'elles inculpent. Cependant, les récits des Causes célèbres suffisent pour nous convaincre que les preuves morales les plus fortes sont toujours susceptibles d'erreurs. Nous devrions donc alors nous abstenir de juger. Mais si les preuves sont telles que les inconvéniens de l'erreur à craindre, multipliés par sa petite probabilité, donnent un produit très-inférieur au danger qui résulterait de l'impunité du crime; le jugement est commandé par l'intérêt de la société : quelquefois même, dans un danger imminent, cet intérêt exige que le magistrat se relâche des formes sagement établies pour la sûreté de l'innocence.

Les coïncidences de quelques événemens remarquables, avec les prédictions des astrologues, des devins et des augures, avec les songes, avec les nombres et les jours réputés heureux ou malheureux, etc., ont donné naissance à une foule de préjugés encore très-répandus. On ne réfléchit pas au grand nombre de non-coïncidences qui n'ont fait aucune impression, ou que l'on ignore. Cependant, c'est le rapport seul des unes aux autres, qui peut donner la probabilité des causes auxquelles on attribue les coïncidences. Si ce rapport était connu, l'expérience confirmerait sans doute, ce que le bon sens et la raison

nous dictent à l'égard de ces préjugés. Ainsi le philosophe de l'antiquité, auquel on montrait dans un temple, pour exalter la puissance du dieu qu'on y adorait, les *ex-voto* de tous ceux qui après l'avoir invoqué, s'étaient sauvés du naufrage, faisait une question conforme au calcul des probabilités, en demandant combien de personnes, malgré cette invocation, avaient péri.

C'est principalement au jeu, qu'une foule d'illusions entretient l'espérance, et la soutient contre les chances défavorables. La plupart de ceux qui mettent aux loteries, ne savent pas combien de chances sont à leur avantage, combien leur sont contraires. Ils n'envisagent que la possibilité, pour une mise légère, de gagner une somme considérable; et les projets que leur imagination enfante, exagèrent à leurs yeux, la probabilité de l'obtenir. Ils seraient sans doute, effrayés du nombre immense des mises perdues, s'ils pouvaient les connaître; mais on prend soin au contraire, de donner aux gains, une grande publicité.

Lorsqu'à la loterie de France, un numéro n'est pas sorti depuis long-temps; la foule s'empresse de le couvrir de mises. Elle juge que le numéro resté long-temps sans sortir, doit au prochain tirage, sortir de préférence aux autres. Une erreur aussi commune me

paraît tenir à une illusion, par laquelle on se reporte involontairement à l'origine des événemens. Il est, par exemple, très-peu vraisemblable qu'au jeu de *croix* et *pile*, on amènera *croix*, dix fois de suite. Cette invraisemblance qui nous frappe encore, lorsqu'il est arrivé neuf fois, nous porte à croire qu'au dixième coup, *pile* arrivera. Cependant loin de nous faire juger ainsi; le passé, en indiquant dans la pièce, une plus grande pente pour *croix* que pour *pile*, rend le premier de ces événemens, plus probable que l'autre: il augmente, comme on l'a vu, la probabilité d'amener *croix* au coup suivant. Une illusion semblable persuade à beaucoup de monde, que l'on peut gagner sûrement à la loterie, en plaçant chaque fois, sur un même numéro jusqu'à sa sortie, une mise dont le produit surpasse la somme de toutes les mises. Mais quand même de semblables spéculations ne seraient pas souvent arrêtées par l'impossibilité de les soutenir; elles ne diminueraient point le désavantage mathématique des spéculateurs, et elles accroîtraient leur désavantage moral; puisqu'à chaque tirage, ils exposeraient une plus grande partie de leur fortune.

Par une illusion contraire aux précédentes, on cherche dans les tirages passés, les numéros le plus souvent sortis, pour en former

des combinaisons sur lesquelles on croit placer sa mise avec avantage. Mais vu la manière dont le mélange des numéros se fait à la loterie ; le passé ne doit avoir sur l'avenir, aucune influence. Les sorties plus fréquentes d'un numéro ne sont que des anomalies du hasard : j'en ai soumis plusieurs au calcul, et j'ai constamment trouvé qu'elles étaient renfermées dans les limites que la supposition d'une égale possibilité de sortie de tous les numéros, permet d'admettre sans invraisemblance.

Dans une longue série d'événemens du même genre, les seules chances du hasard doivent quelquefois offrir ces veines singulières de bonheur ou de malheur, que la plupart des joueurs ne manquent pas d'attribuer à une sorte de fatalité. Il arrive souvent dans les jeux qui dépendent à-la-fois du hasard et de l'habileté des joueurs, que celui qui perd, troublé par sa perte, cherche à la réparer par des coups hasardeux qu'il éviterait dans une autre situation : il aggrave ainsi son propre malheur, et il en prolonge la durée. C'est cependant alors, que la prudence devient nécessaire, et qu'il importe de se convaincre que le désavantage moral attaché aux chances défavorables, s'accroît par le malheur même.

Le sentiment par lequel l'homme s'est placé

long-temps, au centre de l'univers, en se considérant comme l'objet spécial des soins de la nature, porte chaque individu à se faire le centre d'une sphère plus ou moins étendue, et à croire que le hasard a pour lui des préférences. Soutenus par cette opinion, les joueurs exposent souvent des sommes considérables, à des jeux dont ils savent que les chances leur sont contraires. Dans la conduite de la vie, une semblable opinion peut quelquefois avoir des avantages; mais le plus souvent, elle conduit à des entreprises périlleuses et funestes. Ici, comme en tout, les illusions sont dangereuses, et la vérité seule est généralement utile.

Un des grands avantages du calcul des probabilités, est d'apprendre à se défier des premiers aperçus. Comme on reconnaît qu'ils trompent souvent, lorsqu'on peut les soumettre au calcul; on doit en conclure que sur d'autres objets, il ne faut s'y livrer qu'avec une circonspection extrême. Prouvons cela par des exemples.

Une urne renferme quatre boules noires ou blanches, mais qui ne sont pas toutes de la même couleur. On a extrait une de ces boules, dont la couleur est blanche, et que l'on a remise dans l'urne pour procéder encore à de semblables tirages. On demande la

probabilité de n'extraire que des boules noires, dans les quatre tirages suivans.

Si les boules blanches et noires étaient en nombre égal, cette probabilité serait la quatrième puissance de la probabilité $\frac{1}{2}$ d'extraire une boule noire à chaque tirage; elle serait donc $\frac{1}{16}$. Mais l'extraction d'une boule blanche au premier tirage, indique une supériorité dans le nombre des boules blanches de l'urne; car si l'on suppose dans l'urne, trois boules blanches et une noire, la probabilité d'en extraire une boule blanche est $\frac{3}{4}$; elle est $\frac{2}{4}$, si l'on suppose deux boules blanches et deux noires; enfin, elle se réduit à $\frac{1}{4}$, si l'on suppose trois boules noires et une blanche. Suivant le principe de la probabilité des causes, tirée des événemens, les probabilités de ces trois suppositions sont entre elles, comme les quantités $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{1}{4}$; elles sont par conséquent égales à $\frac{3}{6}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{1}{6}$. Il y a ainsi cinq contre un à parier que le nombre des boules noires est inférieur, ou tout au plus égal à celui des blanches. Il semble donc que d'après l'extraction d'une boule blanche au premier tirage, la probabilité d'extraire de suite quatre boules noires, doit être moindre que dans le cas de l'égalité des couleurs, ou plus petite qu'un seizième. Cependant cela n'est pas, et l'on trouve par un calcul fort simple, cette probabilité

plus grande qu'un quatorzième. En effet, elle serait la quatrième puissance de $\frac{3}{4}$, de $\frac{2}{4}$ et de $\frac{1}{4}$, dans la première, la seconde et la troisième des suppositions précédentes sur les couleurs des boules de l'urne. En multipliant respectivement chaque puissance, par la probabilité de la supposition correspondante, ou par $\frac{3}{6}$, $\frac{2}{6}$ et $\frac{1}{6}$; la somme des produits sera la probabilité d'extraire de suite, quatre boules noires. On a ainsi pour cette probabilité, $\frac{29}{384}$, fraction moindre que $\frac{1}{14}$. Ce paradoxe s'explique en considérant que l'indication de la supériorité des boules blanches sur les noires, par le premier tirage, n'exclut point la supériorité des boules noires sur les blanches, supériorité qu'exclut la supposition de l'égalité des couleurs. Or cette supériorité quoique peu vraisemblable, doit rendre la probabilité d'amener de suite, un nombre donné de boules noires, plus grande que dans cette supposition, si ce nombre est considérable; et l'on vient de voir que cela commence, lorsque le nombre donné est égal à quatre.

Considérons encore une urne qui renferme plusieurs boules blanches et noires. Supposons d'abord qu'il n'y ait qu'une boule blanche et une noire. On peut alors parier avec égalité, d'extraire une boule blanche, dans un tirage. Mais si l'urne renferme trois boules dont

deux soient noires; il semble que pour l'égalité du pari, on doit donner deux tirages à celui qui parie d'extraire la boule blanche: on doit en donner trois, si l'urne renferme trois boules noires et une blanche, et ainsi du reste; ensorte que pour compenser par le nombre des tirages, l'inégalité des chances, il faut donner autant de tirages qu'il y a de chances contraires: on suppose toujours qu'après chaque tirage, la boule extraite est remise dans l'urne. Mais il est facile de se convaincre que ce premier aperçu est erroné. En effet, dans le cas de deux boules noires sur une blanche, la probabilité d'extraire de l'urne, deux boules noires en deux tirages, est la seconde puissance de $\frac{2}{3}$ ou $\frac{4}{9}$; mais cette probabilité ajoutée à celle d'amener une boule blanche en deux tirages, est la certitude ou l'unité; puisqu'il est certain que l'on doit amener deux boules noires, ou au moins une boule blanche; la probabilité de ce dernier cas est donc $\frac{5}{9}$ fraction plus grande que $\frac{1}{2}$. Il y aurait plus d'avantage encore à parier d'amener une boule blanche en cinq tirages, lorsque l'urne contient cinq boules noires et une blanche; ce pari est même avantageux en quatre tirages: il revient alors à celui d'amener six en quatre coups, avec un seul dé.

Le chevalier de Meré, ami de Pascal, et

qui fit naître le calcul des probabilités, en excitant ce grand géomètre à s'en occuper, lui disait « qu'il avait trouvé fausseté dans les » nombres par cette raison. Si l'on entre- » prend de faire six avec un dé, il y a de » l'avantage à l'entreprendre en quatre coups, » comme de 671 à 625. Si l'on entreprend » de faire sonnés avec deux dés, il y a dé- » savantage à l'entreprendre en 24 coups. » Néanmoins 24 est à 36 nombre de faces de » deux dés, comme 4 est à 6 nombre des » faces d'un dé. Voilà, écrivait Pascal à Fer- » mat, quel était son grand scandale, qui lui » faisait dire hautement, que les propositions » n'étaient pas constantes et que l'arithmé- » tique se démentait..... Il a très-bon esprit; » mais il n'est pas géomètre : c'est, comme » vous savez, un grand défaut. » Le cheva- lier de Meré trompé par une fausse analogie, pensait que dans le cas de l'égalité des paris, le nombre des coups doit croître proportionnellement au nombre de toutes les chances possibles, ce qui n'est pas exact, mais ce qui approche d'autant plus de l'être, que ce nombre est plus grand.

Je mets encore au rang des illusions, l'application que Leibnitz et Daniel Bernoulli ont faite du calcul des probabilités, à la sommation des séries. Si l'on réduit la fraction dont le

numérateur est l'unité, et dont le dénominateur est l'unité plus une variable, dans une suite ordonnée par rapport aux puissances de cette variable; il est facile de voir qu'en supposant la variable égale à l'unité, la fraction devient $\frac{1}{2}$, et la suite devient, *plus un, moins un, plus un, moins un, etc.* En ajoutant les deux premiers termes, les deux suivans, et ainsi du reste, on transforme la suite dans une autre dont chaque terme est zéro. Grandi, jésuite italien, en avait conclu la possibilité de la création; parce que la suite étant toujours égale à $\frac{1}{2}$, il voyait cette fraction naître d'une infinité de zéros, ou du néant. Ce fut ainsi que Leibnitz crut voir l'image de la création, dans son Arithmétique binaire où il n'employait que les deux caractères zéro et l'unité. Il imagina que l'unité pouvait représenter Dieu; et zéro, le néant; et que l'Être Suprême avait tiré du néant, tous les êtres, comme l'unité avec le zéro, exprime tous les nombres dans ce système. Cette idée plut tellement à Leibnitz, qu'il en fit part au jésuite Grimaldi, président du tribunal des mathématiques à la Chine, dans l'espérance que cet emblème de la création convertirait au christianisme, l'empereur d'alors qui aimait particulièrement les sciences. Je ne rapporte ce trait, que pour montrer

jusqu'à quel point les préjugés de l'enfance peuvent égarer les plus grands hommes.

Leibnitz toujours conduit par une métaphysique singulière et très-déliée, considéra que la suite, *plus un, moins un, plus un, etc.* devient l'unité ou zéro, suivant que l'on s'arrête à un nombre de termes, impair ou pair; et comme dans l'infini, il n'y a aucune raison de préférer le nombre pair à l'impair, on doit, suivant les règles des probabilités, prendre la moitié des résultats relatifs à ces deux espèces de nombres, et qui sont zéro et l'unité; ce qui donne $\frac{1}{2}$ pour la valeur de la série. Daniel Bernoulli a étendu depuis, ce raisonnement à la sommation des séries formées de termes périodiques. Mais toutes ces séries n'ont point, à proprement parler, de valeurs : elles n'en prennent que dans le cas où leurs termes sont multipliés par les puissances successives d'une variable moindre que l'unité. Alors, ces séries sont toujours convergentes, quelque petite que l'on suppose la différence de la variable à l'unité ; et il est facile de démontrer que les valeurs assignées par Bernoulli, en vertu de la règle des probabilités, sont les valeurs mêmes des fractions génératrices des séries, lorsque l'on suppose dans ces fractions, la variable égale à l'unité. Ces valeurs sont encore les limites dont les séries approchent

de plus en plus, à mesure que la variable approche de l'unité. Mais lorsque la variable est exactement égale à l'unité, les séries cessent d'être convergentes : elles n'ont de valeurs, qu'autant qu'on les arrête. La coïncidence remarquable de cette application du calcul des probabilités, avec les limites des valeurs des séries périodiques, suppose que les termes de ces séries sont multipliés par toutes les puissances consécutives de la variable. Mais ces séries peuvent résulter du développement d'une infinité de fractions différentes, dans lesquelles cela n'a pas lieu. Ainsi la série, *plus un, moins un, plus un, etc.* peut naître du développement d'une fraction dont le numérateur est l'unité plus la variable, et dont le dénominateur est ce numérateur augmenté du carré de la variable. En supposant la variable égale à l'unité, ce développement se change dans la série proposée, et la fraction génératrice devient égale à $\frac{2}{3}$; les règles des probabilités donneraient donc alors un faux résultat ; ce qui prouve combien il serait dangereux d'employer de semblables raisonnemens, surtout dans les sciences mathématiques, que la rigueur de leurs procédés doit éminemment distinguer.

Des divers moyens d'approcher de la certitude.

L'induction, l'analogie, des hypothèses fondées sur les faits et rectifiées sans cesse par de nouvelles observations, un tact heureux donné par la nature et fortifié par des comparaisons nombreuses de ses indications avec l'expérience ; tels sont les principaux moyens de parvenir à la vérité.

Si l'on considère avec attention, la série des objets de même nature ; on aperçoit entre eux et dans leurs changemens, des rapports et des lois qui se manifestent de plus en plus, à mesure que la série se prolonge, et qui, en s'étendant et se généralisant sans cesse, conduisent enfin au principe dont ils dépendent. Mais souvent ces lois et ces rapports sont enveloppés de tant de circonstances étrangères, qu'il faut une grande sagacité pour les démêler, et pour remonter à ce principe : c'est en cela que consiste le véritable génie des sciences. L'analyse et la philosophie naturelle doivent leurs plus importantes découvertes, à ce moyen fécond que l'on nomme *induction*. Newton lui a été redevable de son théorème du binome, et du principe de la gravitation universelle. Il est difficile d'apprécier

la probabilité de ses résultats. Elle se fonde sur ce que les rapports et les lois les plus simples, sont les plus communs : c'est ce qui se vérifie dans les formules de l'analyse, et ce que l'on retrouve dans les phénomènes naturels, dans la cristallisation, et dans les combinaisons chimiques. Cette simplicité de lois et de rapports ne paraîtra point étonnante, si l'on considère que tous les effets de la nature, ne sont que les résultats mathématiques d'un petit nombre de lois immuables.

Cependant l'induction, en faisant découvrir les principes généraux des sciences, ne suffit pas pour les établir en rigueur. Il faut toujours les confirmer par des démonstrations, ou par des expériences décisives ; car l'histoire des sciences nous montre que l'induction a quelquefois conduit à des résultats inexacts. Je citerai pour exemple, un théorème de Fermat sur les nombres premiers. Ce grand géomètre qui avait profondément médité sur leur théorie, cherchait une formule qui ne renfermant que des nombres premiers, donnât directement un nombre premier plus grand qu'aucun nombre assignable. L'induction le conduisit à penser que deux élevé à une puissance qui était elle-même une puissance de deux, formait avec l'unité, un nombre premier. Ainsi deux élevé au carré,

plus un, forme le nombre premier cinq : deux élevé à la seconde puissance de deux, ou seize forme avec un, le nombre premier dix-sept. Il trouva que cela était encore vrai pour la huitième et la seizième puissance de deux, augmentée de l'unité ; et cette induction appuyée de plusieurs considérations arithmétiques, lui fit regarder ce résultat, comme général. Cependant il avoue qu'il ne l'avait pas encore démontré. En effet, Euler a reconnu que cela cesse d'avoir lieu pour la trente-deuxième puissance de deux, qui augmentée de l'unité, donne 4294967297, nombre divisible par 641.

Le chancelier Bacon, promoteur si éloquent de la vraie méthode philosophique, a fait de l'induction, un abus bien étrange, pour prouver l'immobilité de la terre. Voici comme il raisonne dans le *Novum Organum*, son plus bel ouvrage. Le mouvement des astres, d'orient en occident, est d'autant plus prompt, qu'ils sont plus éloignés de la terre. Ce mouvement est le plus rapide pour les étoiles : il se ralentit un peu pour Saturne, un peu plus pour Jupiter, et ainsi de suite, jusqu'à la lune et aux comètes les moins élevées. Il est encore perceptible dans l'atmosphère, surtout entre les tropiques, à cause des grands cercles que les molécules de l'air y décrivent ; enfin

il est presqu'insensible pour l'Océan; il est donc nul pour la terre. Mais cette induction prouve seulement que les astres ont des mouvemens propres, contraires au mouvement réel ou apparent qui emporte toute la sphère céleste d'orient en occident, et que ces mouvemens paraissent plus lents pour les astres plus éloignés; ce qui est conforme aux lois de l'optique. Bacon aurait dû être frappé de l'inconcevable vitesse qu'il faut supposer aux astres pour accomplir leur révolution diurne dans l'hypothèse de la terre immobile, et de l'extrême simplicité avec laquelle sa rotation explique comment des corps aussi distans les uns des autres, que les étoiles et les planètes, semblent tous assujétis à cette révolution. Quant à l'Océan et à l'atmosphère, il ne devait point assimiler leur mouvement à celui des astres, qui sont détachés de la terre; au lieu que l'air et la mer faisant partie du globe terrestre, ils doivent participer à son mouvement ou à son repos. Il est singulier que Bacon porté aux plus grandes vues, par son génie, n'ait point été entraîné par l'idée majestueuse que le système de Copernic offre de l'univers. Il pouvait cependant trouver en faveur de ce système, de fortes analogies, dans les découvertes de Galilée, qui lui étaient connues. Il a donné pour la recherche de la

vérité, le précepte, et non l'exemple. Mais en insistant avec toute la force de la raison et de l'éloquence, sur la nécessité d'abandonner les subtilités insignifiantes de l'école, pour se livrer aux observations et aux expériences, et en indiquant la vraie méthode de s'élever aux causes générales des phénomènes; ce grand philosophe a contribué aux progrès immenses que l'esprit humain a faits dans le beau siècle où il a terminé sa carrière

L'analogie est fondée sur la probabilité que les choses semblables ont des causes du même genre, et produisent les mêmes effets. Plus la similitude est parfaite, plus grande est cette probabilité. Ainsi nous jugeons sans aucun doute, que des êtres pourvus des mêmes organes, exécutant les mêmes choses, et communiquant ensemble, éprouvent les mêmes sensations, et sont mus par les mêmes desirs. La probabilité que les animaux qui se rapprochent de nous par leurs organes, ont des sensations analogues aux nôtres, quoiqu'un peu inférieure à celle qui est relative aux individus de notre espèce, est encore excessivement grande; et il a fallu toute l'influence des préjugés religieux, pour faire penser à quelques philosophes, que les animaux sont de purs automates. La probabilité de l'existence du sentiment décroît, à mesure que la

similitude des organes avec les nôtres, diminue; mais elle est toujours très-forte, même pour les insectes. En voyant ceux d'une même espèce, exécuter des choses fort compliquées, exactement de la même manière, de générations en générations, et sans les avoir apprises; on est porté à croire qu'ils agissent par une sorte d'affinité, analogue à celle qui rapproche les molécules des cristaux, mais qui se mêlant au sentiment attaché à toute organisation animale, produit avec la régularité des combinaisons chimiques, des combinaisons beaucoup plus singulières : on pourrait peut-être, nommer *affinité animale*, ce mélange des affinités électives et du sentiment. Quoiqu'il existe beaucoup d'analogie entre l'organisation des plantes et celle des animaux; elle ne me paraît pas cependant suffisante pour étendre aux végétaux, la faculté de sentir; comme rien n'autorise à la leur refuser.

Le soleil faisant éclore par l'action bienfaisante de sa lumière et de sa chaleur, les animaux et les plantes qui couvrent la terre; nous jugeons par l'analogie, qu'il produit des effets semblables sur les autres planètes; car il n'est pas naturel de penser que la matière dont nous voyons l'activité se développer en tant de façons, est stérile sur une aussi grosse

planète que Jupiter qui, comme le globe terrestre, a ses jours, ses nuits et ses années, et sur lequel les observations indiquent des changemens qui supposent des forces très-actives. Cependant ce serait donner trop d'extension à l'analogie, que d'en conclure la similitude des habitans des planètes, et de la terre. L'homme fait pour la température dont il jouit, et pour l'élément qu'il respire, ne pourrait pas, selon toute apparence, vivre sur les autres planètes. Mais ne doit-il pas y avoir une infinité d'organisations relatives aux diverses constitutions des globes de cet univers? Si la seule différence des élémens et des climats, met tant de variété dans les productions terrestres; combien plus doivent différer, celles des diverses planètes et de leurs satellites. L'imagination la plus active ne peut s'en former aucune idée; mais leur existence est très-vraisemblable

Nous sommes conduits par une forte analogie, à regarder les étoiles, comme autant de soleils doués ainsi que le nôtre, d'un pouvoir attractif proportionnel à la masse et réciproque au carré des distances. Car ce pouvoir étant démontré pour tous les corps du système solaire, et pour leurs plus petites molécules; il paraît appartenir à toute la matière. Déjà, les mouvemens des petites étoiles

que l'on a nommées *doubles* à cause de leur rapprochement, paraissent l'indiquer : un siècle au plus d'observations précises, en constatant leurs mouvemens de révolution les unes autour des autres, mettra hors de doute, leurs attractions réciproques.

L'analogie qui nous porte à faire de chaque étoile, le centre d'un système planétaire, est beaucoup moins forte que la précédente; mais elle acquiert de la vraisemblance, par l'hypothèse que nous avons proposée sur la formation des étoiles et du soleil; car dans cette hypothèse, chaque étoile ayant été comme le soleil, primitivement environnée d'une vaste atmosphère; il est naturel d'attribuer à cette atmosphère, les mêmes effets, qu'à l'atmosphère solaire, et de supposer qu'elle a produit en se condensant, des planètes et des satellites.

La méthode la plus sûre qui puisse nous guider dans la recherche de la vérité, consiste à s'élever par la voie de l'induction, des phénomènes particuliers, à des rapports de plus en plus étendus, jusqu'à ce que l'on arrive enfin à la loi générale dont ils dérivent. Ensuite on vérifie cette loi, soit par des expériences directes, lorsque cela est possible, soit en examinant si elle satisfait aux phénomènes connus; et si par une rigoureuse

analyse, on les voit tous découler de cette loi, jusque dans leurs moindres détails; si d'ailleurs ils sont très-variés et très-nombreux; la science alors acquiert le plus haut degré de certitude et de perfection, qu'elle puisse atteindre. Telle est devenue l'astronomie, par la découverte de la pesanteur universelle. L'histoire des sciences fait voir que cette marche lente et pénible de l'induction, n'a pas toujours été celle des inventeurs. L'imagination impatiente de remonter aux causes, se plaît à créer des hypothèses; et souvent, elle dénature les faits, pour les plier à son ouvrage : alors, les hypothèses sont dangereuses. Mais quand on ne les envisage que comme des moyens de lier entre eux les phénomènes, pour en découvrir les lois; lorsqu'en évitant de leur attribuer de la réalité, on les rectifie sans cesse par de nouvelles observations; elles peuvent conduire aux véritables causes, ou du moins, nous mettre à portée de conclure des phénomènes observés, ceux que des circonstances données doivent faire éclore.

Si l'on essayait toutes les hypothèses que l'on peut former sur la cause des phénomènes; on parviendrait par voie d'exclusion, à la véritable. Ce moyen a été employé avec succès : quelquefois on est arrivé à plusieurs

hypothèses qui expliquaient également bien tous les faits connus, et entre lesquelles les savans se sont partagés, jusqu'à ce que des observations décisives aient fait connaître la véritable. Alors il est intéressant pour l'histoire de l'esprit humain, de revenir sur ces hypothèses, de voir comment elles parvenaient à expliquer un grand nombre de faits, et de rechercher les changemens qu'elles doivent subir, pour rentrer dans celle de la nature. C'est ainsi que le système de Ptolémée, qui n'est que la réalisation des apparences célestes, se transforme dans l'hypothèse du mouvement des planètes autour du soleil, en y rendant égaux et parallèles à l'orbe solaire, les cercles et les épicycles que Ptolémée fait décrire annuellement, et dont il laisse la grandeur, indéterminée. Il suffit ensuite, pour changer cette hypothèse, dans le vrai système du monde, de transporter en sens contraire, à la terre, le mouvement apparent du soleil.

Il est presque toujours impossible de soumettre au calcul, la probabilité des résultats obtenus par ces divers moyens : c'est ce qui a lieu pareillement pour les faits historiques. Mais l'ensemble des phénomènes expliqués ou des témoignages, est quelquefois tel, que sans pouvoir en apprécier la probabilité, on ne peut raisonnablement se permettre aucun

doute à leur égard. Dans les autres cas, il est prudent de ne les admettre qu'avec beaucoup de réserve.

Notice historique sur le Calcul des Probabilités.

Depuis long-temps, on a déterminé dans les jeux les plus simples, les rapports des chances favorables ou contraires aux joueurs: les enjeux et les paris étaient réglés d'après ces rapports. Mais personne avant Pascal et Fermat, n'avait donné des principes et des méthodes pour soumettre cet objet au calcul, et n'avait résolu des questions de ce genre, un peu compliquées. C'est donc à ces deux grands géomètres qu'il faut rapporter les premiers élémens de la science des probabilités, dont la découverte peut être mise au rang des choses remarquables qui ont illustré le dix-septième siècle, celui de tous les siècles qui fait le plus d'honneur à l'esprit humain. Le principal problème qu'ils résolurent tous deux par des voies différentes, consiste, comme on l'a vu précédemment, à partager équitablement l'enjeu, entre des joueurs dont les adresses sont égales, et qui conviennent de quitter une partie, avant qu'elle finisse; la condition du jeu étant que pour gagner la

partie, il faut atteindre le premier, un nombre donné de points. Il est clair que le partage doit se faire proportionnellement aux probabilités respectives des joueurs, de gagner cette partie, probabilités qui dépendent des nombres de points qui leur manquent encore. La méthode de Pascal est fort ingénieuse, et n'est au fond, que l'emploi de l'équation aux différences partielles, relative à ce problème, pour déterminer les probabilités successives des joueurs, en allant des nombres les plus petits aux suivans. Cette méthode est limitée au cas de deux joueurs : celle de Fermat, fondée sur les combinaisons, s'étend à un nombre quelconque de joueurs. Pascal crut d'abord qu'elle devait être, comme la sienne, restreinte à deux joueurs ; ce qui établit entre eux, une discussion à la fin de laquelle Pascal reconnut la généralité de la méthode de Fermat.

Huyghens réunit les divers problèmes que l'on avait déjà résolus, et en ajouta de nouveaux, dans un petit Traité, le premier qui ait paru sur cette matière, et qui a pour titre, *De Ratiociniis in ludo aleæ*. Plusieurs géomètres s'en occupèrent ensuite : Huddes et le grand pensionnaire Witt en Hollande, et Halley en Angleterre, appliquèrent le calcul, aux probabilités de la vie humaine ; et Halley

publia pour cet objet, la première table de mortalité. Vers le même temps, Jacques Bernoulli proposa aux géomètres, divers problèmes de probabilité dont il donna depuis, des solutions. Enfin il composa son bel ouvrage intitulé *Ars conjectandi*, qui ne parut que sept ans après sa mort arrivée en 1706. La science des probabilités est beaucoup plus approfondie dans cet ouvrage, que dans celui d'Huyghens ; l'auteur y donne une théorie générale des combinaisons et des suites, et l'applique à plusieurs questions difficiles, concernant les hasards. Cet ouvrage est encore remarquable par la justesse et la finesse des vues, par l'emploi de la formule du binome dans ce genre de questions, et par la démonstration de ce théorème, savoir, qu'en multipliant indéfiniment les observations et les expériences ; le rapport des événemens de diverses natures, qui doivent arriver, approche de celui de leurs possibilités respectives, dans des limites dont l'intervalle se resserre de plus en plus, et devient moindre qu'aucune quantité assignable. Ce théorème est très-utile pour reconnaître par les observations, les lois et les causes des phénomènes. Bernoulli attachait avec raison, une grande importance à sa démonstration qu'il dit avoir méditée pendant vingt années.

Dans l'intervalle de la mort de Jacques Bernoulli, à la publication de son ouvrage; Montmort et Moivre firent paraître deux traités sur le calcul des probabilités. Celui de Montmort a pour titre, *Essai sur les Jeux de hasard :* il contient de nombreuses applications de ce calcul, aux divers jeux. L'auteur y a joint dans la seconde édition, quelques lettres dans lesquelles Nicolas Bernoulli donne des solutions ingénieuses de plusieurs problèmes difficiles, de probabilité. Le traité de Moivre, postérieur à celui de Montmort, parut d'abord dans les Transactions Philosophiques de l'année 1711. Ensuite l'auteur le publia séparément, et il l'a perfectionné successivement dans les trois éditions qu'il en a données. Cet ouvrage est principalement fondé sur la formule du binome; et les problèmes qu'il contient, ont, ainsi que leurs solutions, une grande généralité. Mais ce qui le distingue, est la théorie des suites récurrentes, et leur usage dans ces matières. Cette théorie est l'intégration des équations linéaires aux différences finies à coefficiens constans, intégration à laquelle Moivre parvient d'une manière très-heureuse. Comme il est toujours intéressant de connaître la marche des inventeurs; je vais exposer celle de Moivre, en l'appliquant à une suite récurrente dont la

relation entre trois termes consécutifs est donnée. D'abord, il considère la relation entre les termes consécutifs d'une progression géométrique, ou l'équation à deux termes, qui l'exprime. En la rapportant aux termes inférieurs d'une unité, il la multiplie dans cet état, par un facteur constant, et il retranche le produit, de l'équation primitive. Par là, il obtient une relation entre trois termes consécutifs de la progression géométrique. Moivre considère ensuite une seconde progression géométrique dont la raison des termes, est le facteur même qu'il vient d'employer. Il diminue pareillement d'une unité, l'indice des termes, dans l'équation de cette nouvelle progression : dans cet état, il la multiplie par la raison des termes de la première progression, et il retranche le produit, de l'équation primitive; ce qui lui donne entre trois termes consécutifs de la seconde progression, une relation entièrement semblable à celle qu'il a trouvée pour la première progression. Puis il observe que si l'on ajoute terme à terme, les deux progressions; la même relation subsiste entre trois quelconques de ces sommes consécutives. Il compare les coefficiens de cette relation, à ceux de la relation des termes de la suite récurrente proposée; et il trouve pour déterminer les rapports des termes

consécutifs des deux progressions, une équation du second degré dont les racines sont ces rapports. Par là, Moivre décompose la suite récurrente, en deux progressions géométriques multipliées, chacune, par une constante arbitraire qu'il détermine au moyen des deux premiers termes de la suite récurrente. Ce procédé est au fond, celui que Lagrange a depuis employé pour l'intégration des équations linéaires aux différences à coefficiens constans.

Très-peu de temps avant ces recherches de Moivre, Taylor avait donné dans son excellent ouvrage intitulé *Methodus incrementorum*, la manière d'intégrer l'équation linéaire aux différences du premier ordre, avec un coefficient variable, et un dernier terme fonction du seul indice. C'est donc à ces deux illustres géomètres, que l'on est redevable de la considération et de l'intégration de ce genre d'équations. A la vérité, les relations des termes consécutifs des progressions arithmétiques et géométriques, ne sont que les cas les plus simples des équations linéaires aux différences. Mais on ne les avait pas envisagés sous ce point de vue, l'un de ceux qui se rattachant à des théories générales, ont conduit à ces théories, et sont par là, de véritables découvertes.

Moivre a repris dans son ouvrage, le théorème de Jacques Bernoulli sur la probabilité des résultats donnés par un grand nombre d'observations. Il ne se contente pas de faire voir, comme Bernoulli, que le rapport des événemens qui doivent arriver, approchera sans cesse de celui de leurs possibilités respectives ; il donne de plus une expression élégante et simple de la probabilité que la différence de ces deux rapports, sera contenue dans des limites données. Pour cela, il détermine le rapport du plus grand terme du développement d'une puissance très-élevée du binome, à la somme de tous ses termes; et le logarithme hyperbolique de l'excès de ce terme, sur les termes qui en sont très-voisins. Le plus grand terme étant alors le produit d'un nombre considérable de facteurs ; son calcul numérique devient impraticable. Pour l'obtenir par une approximation convergente, Moivre fait usage d'un théorème de Stirling sur le terme moyen du binome élevé à une haute puissance, théorème remarquable, surtout en ce qu'il introduit la racine carrée du rapport de la circonférence au rayon, dans une expression qui semble devoir être étrangère à cette transcendante. Aussi Moivre fut-il singulièrement frappé de ce résultat que Stirling avait déduit de l'expression de la

circonférence en produits infinis, expression à laquelle Wallis était parvenu par une singulière analyse qui contient les germes de la théorie si curieuse et si utile des intégrales définies.

Plusieurs savans parmi lesquels on doit distinguer Deparcieux, Kersseboom, Wargentin, Dupré de Saint-Maure, Simpson, Sussmilch, Price et Duvillard, ont réuni un grand nombre de données précieuses, sur la population, les naissances, les mariages et la mortalité. Ils ont donné des formules et des tables relatives aux rentes viagères, aux tontines, aux assurances, etc. Mais dans cette courte notice, je ne puis qu'indiquer ces travaux estimables, pour m'attacher aux idées originales. De ce nombre, est la distinction des espérances mathématique et morale, et le principe ingénieux que Daniel Bernoulli a donné pour soumettre celle-ci à l'analyse. Telle est encore l'application heureuse qu'il a faite du calcul des probabilités, à l'inoculation. On doit surtout, placer au nombre de ces idées originales, la considération directe des possibilités des événemens, tirées des événemens observés. Jacques Bernoulli et Moivre supposaient ces possibilités, connues; et ils cherchaient la probabilité que le résultat des expériences à faire, approchera de plus en plus de les

représenter. Bayes, dans les Transactions Philosophiques de l'année 1763, a cherché directement la probabilité que les possibilités indiquées par des expériences déjà faites, sont comprises dans des limites données; et il y est parvenu d'une manière fine et très-ingénieuse, quoiqu'un peu embarrassée. Cet objet se rattache à la théorie de la probabilité des causes et des événemens futurs, conclue des événemens observés; théorie dont j'exposai quelques années après, les principes, avec la remarque de l'influence des inégalités qui peuvent exister entre des chances que l'on suppose égales. Quoique l'on ignore quels sont les événemens simples que ces inégalités favorisent; cependant cette ignorance même accroît souvent, la probabilité des événemens composés. En généralisant l'analyse et les problèmes concernant les probabilités, je fus conduit au calcul des différences finies partielles que Lagrange a traité depuis, par une méthode fort simple, et dont il a fait d'élégantes applications à ce genre de problèmes. La théorie des fonctions génératrices, que je donnai vers le même temps, comprend ces objets, parmi ceux qu'elle embrasse, et s'adapte d'elle-même et avec la plus grande généralité, aux questions de probabilité, les plus difficiles. Elle détermine encore par des

approximations très-convergentes, les valeurs des fonctions composées d'un grand nombre de termes et de facteurs; et en faisant voir que la racine carrée du rapport de la circonférence au rayon entre le plus souvent dans ces valeurs, elle montre qu'une infinité d'autres transcendantes peuvent également s'y introduire.

On a encore soumis au calcul, la probabilité des témoignages, les votes et les décisions des assemblées électorales et délibérantes. Tant de passions, d'intérêts divers et de circonstances compliquent les questions relatives à ces objets, qu'elles sont presque toujours insolubles. Mais la solution de problèmes plus simples, et qui ont avec elles beaucoup d'analogie, peut souvent répandre de grandes lumières sur ces questions difficiles.

L'une des plus intéressantes applications du calcul des probabilités, concerne les milieux qu'il faut choisir entre les résultats des observations. Plusieurs géomètres s'en sont occupés, et Lagrange a publié dans les Mémoires de Turin, une belle méthode pour déterminer ces milieux, quand la loi des erreurs des observations est connue. J'ai donné pour le même objet, une méthode fondée sur un artifice singulier qui peut être employé avec avantage dans d'autres questions d'analyse,

et qui en permettant d'étendre indéfiniment dans tout le cours d'un long calcul, les fonctions qui doivent être limitées par la nature du problème, indique les modifications que chaque terme du résultat final doit recevoir en vertu de ces limitations. Mais ces méthodes supposent connue, la loi des erreurs des observations; ce qui n'est pas. Heureusement, j'ai trouvé que si les observations sont en grand nombre, la recherche des milieux que l'on doit choisir, devient indépendante de cette loi. On a vu précédemment, que chaque observation fournit une équation de condition, du premier degré, qui peut toujours être disposée de manière que tous ses termes soient dans le premier membre, le second étant zéro. L'usage de ces équations est une des causes principales de la grande précision de nos tables astronomiques; parce que l'on a pu ainsi faire concourir un nombre immense d'excellentes observations, à la détermination de leurs élémens. Lorsqu'il n'y a qu'un seul élément à déterminer, Côtes avait prescrit de préparer les équations de condition, de sorte que le coefficient de l'élément inconnu fût positif dans chacune d'elles, et d'ajouter ensuite toutes ces équations, pour former une équation finale d'où l'on tire la valeur de cet élément. La règle de Côtes

fut suivie par tous les calculateurs. Mais quand il fallait déterminer plusieurs élémens; on n'avait aucune règle fixe pour combiner les équations de condition, de manière à obtenir les équations finales nécessaires: seulement, on choisissait pour chaque élément, les observations les plus propres à le déterminer. Ce fut pour obvier à ces tâtonnemens, que Legendre et Gauss imaginèrent d'ajouter les carrés des premiers membres des équations de condition, et d'en rendre la somme un *minimum*, en y faisant varier chaque élément inconnu : par ce moyen, on obtient directement autant d'équations finales, qu'il y a d'élémens. Mais les valeurs déterminées par ces équations, méritent-elles la préférence sur toutes celles que l'on peut obtenir par d'autres moyens? C'est ce que le calcul des probabilités pouvait seul apprendre. Je l'appliquai donc à cet objet important, et je fus conduit par une analyse délicate, à la règle que je viens d'indiquer, et qui réunit ainsi à l'avantage de faire connaître par un procédé régulier, les élémens cherchés, celui d'en donner les valeurs qui ne laissent à craindre que les plus petites erreurs possibles.

J'ai rassemblé tous ces objets dans ma *Théorie analytique des Probabilités*, où je me suis proposé d'exposer de la manière la

plus générale, les principes et l'analyse du calcul des probabilités, ainsi que les solutions des problèmes les plus intéressans et les plus difficiles que ce calcul présente.

On voit par cet Essai, que la théorie des probabilités n'est au fond, que le bon sens réduit au calcul : elle fait apprécier avec exactitude, ce que les esprits justes sentent par une sorte d'instinct, sans qu'ils puissent souvent s'en rendre compte. Si l'on considère les méthodes analytiques auxquelles cette théorie a donné naissance, la vérité des principes qui lui servent de base, la logique fine et délicate qu'exige leur emploi dans la solution des problèmes, les établissemens d'utilité publique qui s'appuient sur elle, et l'extension qu'elle a reçue et qu'elle peut recevoir encore, par son application aux questions les plus importantes de la philosophie naturelle et de l'économie politique; si l'on observe ensuite que dans les choses mêmes qui ne peuvent être soumises au calcul, elle donne les aperçus les plus sûrs qui puissent nous guider dans nos jugemens, et qu'elle nous apprend à nous garantir des illusions qui souvent nous égarent; on verra qu'il n'est point de science plus digne de nos méditations, et dont les résultats soient plus utiles.

FIN.

TABLE DES MATIÈRES.

Applications du calcul des probabilités.

FIN DE LA TABLE.